

4. Centro de Gravedad

El peso es la fuerza con la que la tierra atrae los cuerpos con masa.

$$P = m \cdot g \quad m = \text{masa de cada partícula} \quad g = \text{aceleración gravedad.}$$

El cuerpo se comportará como si toda su masa estuviera concentrada en un lugar (centro de gravedad o de masa). Estos coinciden cuando el cuerpo está en un campo gravitatorio uniforme (magnitud y dirección constante).

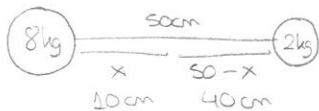
El centro de gravedad es el punto donde se considera concentrada toda la masa y donde se consideran aplicados los efectos gravitatorios. En este centro de gravedad, las fuerzas que la gravedad ejerce sobre los diferentes puntos que forman el cuerpo producen momento resultante nulo (equilibrio).

Posición del centro de gravedad:

$$\vec{r}_{CG} = X_{CG} \cdot \vec{i} + Y_{CG} \cdot \vec{j} + Z_{CG} \cdot \vec{k}$$

$$X_{CG} = \frac{X_1 \cdot m_1 + X_2 \cdot m_2 + X_3 \cdot m_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

* Se tienen 2 bolas de acero de 8 y 2kg unidas por una barra de 50cm. ¿A qué distancia de la bola de 8kg se encuentra el CG del conjunto?



$$|M| = F \cdot d \quad \text{Igualar momentos.}$$

$$8 \cdot x = 2 \cdot (50 - x) \quad ; \quad 8x = 100 - 2x \quad ; \quad 10x = 100 \quad ; \quad x = 10 \text{ cm}$$

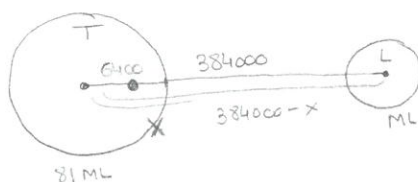
1 Sistema de partículas formado por masas en puntos: (coordenadas en metros) $m_1 = \frac{1}{2}$ kg en (0,0) $m_2 = 3$ kg en (3,5) $m_3 = 2$ kg en (6,0) $m_4 = \frac{3}{2}$ kg en (-2,2). Encontrar centro de masas.

$$X_{CG} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + \frac{3}{2} \cdot (-2)}{\frac{1}{2} + 3 + 2 + \frac{3}{2}} = \frac{18}{7} \text{ m.} \quad Y_{CG} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 2}{7} = \frac{18}{7} \text{ m.} \quad (x,y) = \left(\frac{18}{7}, \frac{18}{7}\right) \text{ m.}$$

2 Dos masas de 5kg y 9kg están unidas en posiciones (5,0,0) y (7,0,0) ¿c.d.g.?

$$X_{CG} = \frac{5 \cdot 5 + 9 \cdot 7}{5 + 9} = \frac{88}{14} = \frac{44}{7} \text{ m.} \quad Y_{CG} = \frac{5 \cdot 0 + 9 \cdot 0}{14} = 0 \text{ m.} \quad Z_{CG} = \frac{5 \cdot 0 + 9 \cdot 0}{5 + 9} = 0 \text{ m.} \quad (x,y,z) = \left(\frac{44}{7}, 0, 0\right) \text{ m.}$$

3 Masa Tierra es 81 veces m. Luna, distancia entre centros es de 384000 km. El radio de la tierra es 6400 km ¿A qué distancia de Tierra está c.d.g. Tierra-Luna?



$$M = F \cdot d \quad F \cdot d_{Luna} = F \cdot d_{Tierra}$$

$$81m_L \cdot x = m_L \cdot (384000 - x)$$

$$81m_L x = 384000m_L - m_L x$$

$$82m_L x = 384000m_L$$

$$x = \frac{384000m_L}{82m_L} = 4682,92 \text{ km}$$

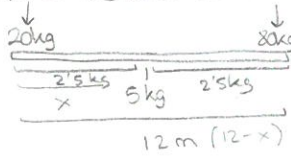
el c.d.g. estará dentro de la propia tierra a 4682,92 km desde su núcleo hasta superficie.

4) $m_1 = 2\text{kg}$ en $(0,0)$ $m_2 = 3\text{kg}$ en $(1,2)$ y $m_3 = 5\text{kg}$ en $(4,0)$. ¿veer posición c.d.g.?

$$r_{CG} = X_{CG} \cdot \vec{i} + Y_{CG} \cdot \vec{j} + Z_{CG} \cdot \vec{k} \rightarrow r_{CG} = 2'3 \cdot \vec{i} + 0'6 \cdot \vec{j}$$

$$X_{CG} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4}{2 + 3 + 5} = \frac{23}{10} = 2'3 \quad Y_{CG} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0}{10} = \frac{6}{10} = 0'6$$

5) Niño de 20kg está en extremo de tablón de 5kg de masa y 12m longitud. (Tablón homogéneo, masa en centro). En el otro extremo hombre de 80kg . ¿A qué distancia del niño estará el c.d.g.? $M = F \cdot d$



$$(20 + 2'5) \cdot x = (80 + 2'5) \cdot (12 - x)$$

$$22'5x = 82'5x + 990$$

$$105x = 990 \rightarrow x = 9'43\text{ m}$$

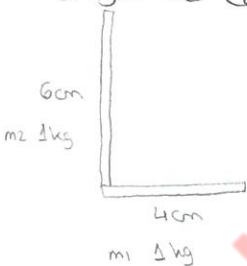
6) $m_1 = 1\text{kg}$ en $(-1,3)$ $m_2 = 2\text{kg}$ en $(1,2)$ $m_3 = 3\text{kg}$ en $(4,5)$ y $m_4 = 4\text{kg}$ en $(5,2)$. ¿coord. c.d.g.?

$$X_{CG} = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{33}{10} = 3'3\text{ m} \quad Y_{CG} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{10} = \frac{30}{10} = 3\text{ m} \quad (x, y) = (3'3, 3)\text{ m}$$

7) Calcula centro gravedad formado por $m_1 = 1\text{kg}$ $m_2 = 2\text{kg}$ $m_3 = 3\text{kg}$ en posiciones $(3, 2, 1)$ $(1, 0, 3)$ y $(0, 2, 0)$ respectivamente en cm.

$$X_{CG} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{1 + 2 + 3} = \frac{5}{6}\text{ cm} \quad Y_{CG} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{6} = \frac{8}{6}\text{ cm} \quad Z_{CG} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0}{6} = \frac{7}{6}\text{ cm} \quad (x, y, z) = \left(\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{7}{6}\right)\text{ cm}$$

8) Encuentra coord. centro de gravedad de sistema formado por 2 alambres finos, uniformes y misma densidad lineal, de 4 y 6 cm longitud situados coincidiendo con los ejes coordenados (en sentidos positivos) con uno de sus extremos tocando en el origen de coordenadas sabiendo que el alambre de 4 cm está sobre eje x .



9) Calcula c.d.g. de sistema (coord. en m.) $m_1 = 3\text{kg}$ en $(4,3)$ $m_2 = 2\text{kg}$ en $(-1,0)$ $m_3 = 8\text{kg}$ en $(3,-2)$

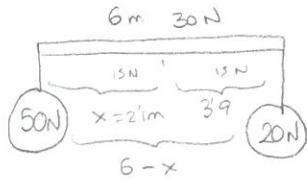
$$X_{CG} = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 8 \cdot 3}{3 + 2 + 8} = \frac{34}{13}\text{ m} \quad Y_{CG} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot (-2)}{13} = \frac{-7}{13}\text{ m} \quad (x, y) = \left(\frac{34}{13}, \frac{-7}{13}\right)$$

10) C.d.g. de sistema en cm formado por $m_1 = 100\text{g}$ $(0,0,0)$, $m_2 = 200\text{g}$ $(30,0,0)$ $m_3 = 150\text{g}$ $(0,20,0)$ y $m_4 = 50\text{g}$ $(0,0,10)$

$$X_{CG} = \frac{0'1 \cdot 0 + 0'2 \cdot 30 + 0'15 \cdot 0 + 0'05 \cdot 0}{0'1 + 0'2 + 0'15 + 0'05} = \frac{6}{0'5} = 12\text{ cm} \quad Y_{CG} = \frac{0'1 \cdot 0 + 0'2 \cdot 0 + 0'15 \cdot 20 + 0'05 \cdot 0}{0'5} = \frac{3}{0'5} = 6\text{ cm}$$

$$Z_{CG} = \frac{0'1 \cdot 0 + 0'2 \cdot 0 + 0'15 \cdot 0 + 0'05 \cdot 10}{0'5} = \frac{0'5}{0'5} = 1\text{ cm} \quad (x, y, z) = (12, 6, 1)\text{ cm}$$

- 11) Barra delgada de material uniforme longitud de 6m y peso 30 N. En su extremo izquierdo se cuelga pesa de 50 N y en extremo derecho pesa de 20 N. ¿A qué distancia del extremo derecho de la barra está el centro de gravedad del conjunto "barra + pesas"?



Igualar momentos

$$M_1 = (50N + 15N) \cdot x = 65x$$

$$M_2 = (20N + 15N) \cdot (6 - x) = 210 - 35x$$

$$65x = 210 - 35x$$

$$100x = 210$$

$$x = 2.1 \text{ m.}$$

$$6 - 2.1 \text{ m} = 3.9 \text{ m} //$$

- 12) Conjunto con cdg en origen de coords. (0,0,0) en m. $m_1 = 3 \text{ kg} (1, 2, 3)$ $m_2 = 5 \text{ kg} (0, -2, 1)$ $m_3 = 4 \text{ kg} (-1, 3, 4)$ $m_4 = 8 \text{ kg}$ ¿En qué posición estará colocada?

$$X_0 = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 8 \cdot X}{3 + 5 + 4 + 8} = \frac{-1 + 8X}{20}; 0 = \frac{-1 + 8X}{20}; X = \frac{1}{8} \text{ m}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{8}, -1, \frac{-15}{4} \right) \text{ m.}$$

$$Y_0 = \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 8 \cdot Y}{20} = \frac{8 + 8Y}{20}; Y = -1 \text{ m}$$

$$Z_0 = \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot Z}{20} = \frac{30 + 8Z}{20}; Z = \frac{-15}{4} \text{ m}$$