2 Vectores

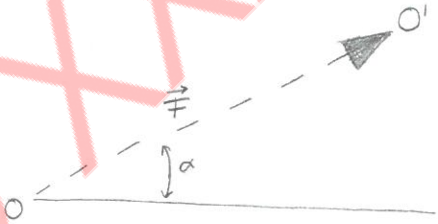
Mecánica

Estudia el equilibrio y movimiento de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. Se divide en: estática, cinemática y dinámica.

▸ Estática (cuerpos en reposo)

Los elementos para el estudio del equilibrio son fuerzas y momentos que se representan en vectores.

Vectores = segmento orientado que depende de su módulo, dirección y sentido. El punto O es el punto de aplicación.



- Módulo: Indica lo grande o pequeño que es (tamaño)
- Dirección: Recta sobre la que se apoya
- Sentido: Hacia donde va dirigido (cada dirección tiene 2 sentidos)
- Punto de aplicación: Punto sobre el que actúa.

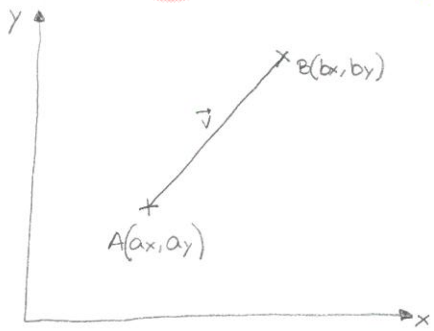
Magnitudes vectoriales: Posición, velocidad, aceleración, fuerza, momento lineal...
se representan con flechita: $\vec{F}$

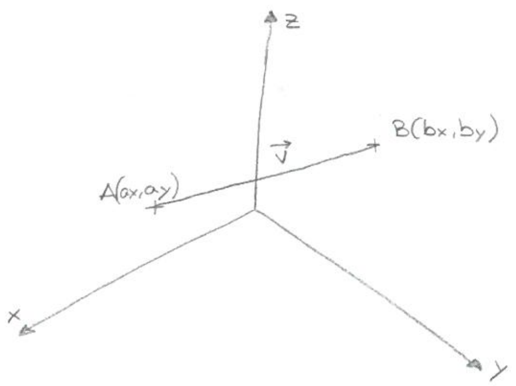
Magnitudes escalares: (no tienen dirección y sentido) Temperatura, masa
se representan mediante un valor.

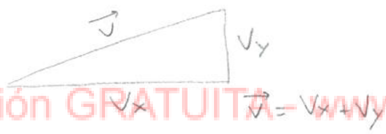
Coordenadas cartesianas: eje x horizontal (abscisas) y eje y vertical (ordenadas)

$$\vec{v} = (\underbrace{V_x, V_y}_{\text{componentes del vector}}) \qquad \underset{\text{Punto aplicación del vector } \vec{v}}{A}(a_x, a_y) \qquad \underset{\text{extremo}}{B}(b_x, b_y) \qquad \vec{v} = \vec{AB}$$

Para representarlo tridimensional necesitamos tercer componente perpendicular a las otras dos: $\vec{v} = (V_x, V_y, V_z)$





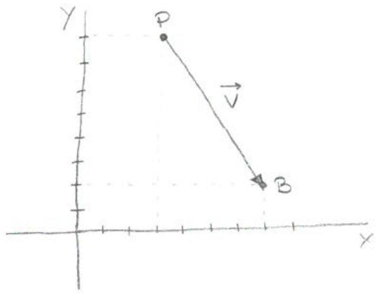


Ejercicios:

① Representa gráficamente el vector $\vec{v}(4,-6)$ cuyo punto de aplicación es $P(3,8)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su extremo?

$P(3,8) + \vec{v}(4,-6) = (7,2)$ $\quad B(7,2)$

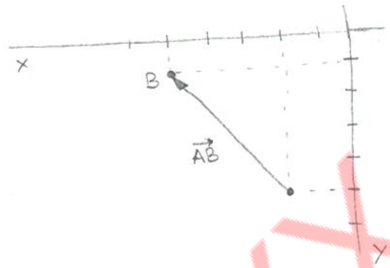
coordenadas extremo



② ¿Qué componentes tendrá un vector con punto de aplicación $A(-2,-5)$ y extremo en el punto $B(-5,-1)$?

$\overrightarrow{AB}$ (P.A → A, extremo → B)

$\overrightarrow{AB} = (-5-(-2), -1-(-5)) = (-3, 4)$



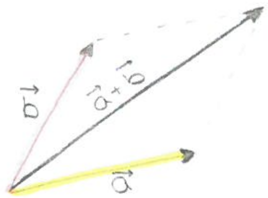
Suma de vectores

Se puede sumar gráfica o numericamente.

- Gráfica:

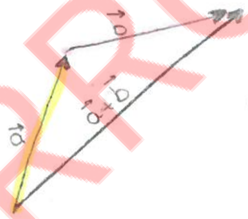
Método del paralelogramo

Reproducir segmentos paralelos a vectores que pasen por las puntas de estos. Donde corten



Método del polígono

un vector a continuación del otro



- Numéricamente:

sumando componentes de vectores

$\vec{a}(a_x, a_y)$ $\vec{b}(b_x, b_y)$

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ $\quad \vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j}$

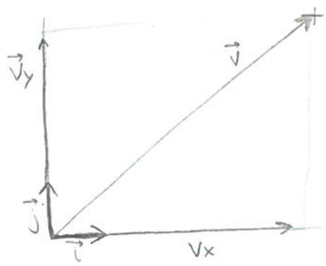
$\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x)\vec{i} + (v_y + w_y)\vec{j}$

sumando proyecciones en ejes cartesianos

$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ Se definen vectores unitarios eje $OX \to \vec{i}$ $\quad OY \to \vec{j}$

Las proyecciones del vector $\vec{v}$ serán $\vec{v}_x = v_x\vec{i}$ $\quad \vec{v}_y = v_y\vec{j}$

v_x v_y son los módulos de las proyecciones



Resta de vectores

$\vec{v} - \vec{w} = (v_x - w_x)\vec{i} + (v_y - w_y)\vec{j}$

Ejercicios de vectores

① Calcular distancia entre los puntos $A(2,1)$ y $B(-3,2)$.

$\vec{AB} = (-3-2\,,\,2-1) = (-5,1)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{-5^2 + 1^2} = \sqrt{26} = 5'099$

② Si $\vec{v}$ es un vector de componentes $(3,4)$, hallar un vector unitario de misma dirección y sentido.

$U_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{V_x}{|\vec{v}|}, \frac{V_y}{|\vec{v}|}\right) \qquad |\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$U_v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

③ Un vector $\vec{AB}$ tiene componentes $(5,-2)$. Hallar coordenadas de A si $B(12,-3)$

$\vec{AB} = (B_x - A_x\,,\,B_y - A_y)$

$(5,-2) = (12-x, -3-y) \begin{cases} x = 12-5 = 7 \\ y = -3+2 = -1 \end{cases} \quad A(7,-1)$

④ $\vec{u} = (2,-1)$. Determinar dos vectores equipolentes que serán $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ cuando $A(1,-3)$ $D(2,0)$

$\boxed{\vec{u} = \vec{AB}}$ $(2,-1) = (x-1\,,\,y-(-3)) \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \vec{B} = (3,-4)$

$\boxed{\vec{u} = \vec{CD}}$ $(2,-1) = (2-x, 0-y) \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \vec{C} = (0,1)$

⑤ $\vec{a} = (3,-1)$ $\vec{b} = (-2,-2)$ $\vec{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\vec{d} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\bar{a} + \bar{b} = (3+(-2), -1+(-2)) = (1,-3)$

$\bar{a} + 2c = \left(3 + 2\cdot\frac{1}{2}, -1 + 2\cdot\frac{3}{2}\right) = (4,2)$

$\bar{a} + \bar{d} = \left(3 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right), -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \left(\frac{6\sqrt{5}}{2}, \frac{-3\sqrt{6}}{3}\right)$

$\bar{c} - \bar{b} = \left(\frac{1}{2} - (-2), \frac{3}{2} - (-2)\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

⑥ $\bar{a} = (3,-1)$ $\bar{b} = (-2,-2)$ $\bar{c} = (-3,-1)$

$\bar{a} - \bar{b} = (3-(-2), -1-(-2)) = (5,1)$

$\bar{b} - \bar{a} = (-2-3, -2-(-1)) = (-5,-1)$

$\bar{a} + \bar{c} = (3+(-3), -1+(-1)) = (0,-2)$

$\vec{BC}\ (1,3)$ $\quad A + \vec{BC}\ (-1,-2) + (1,3) = ((-1)+1, (-2)+3) = (0,1)$

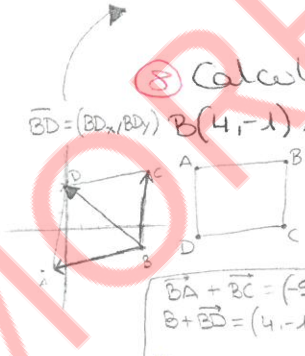
⑦ $\bar{a}(2,-3)$ $\bar{b}\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

$-3\bar{a} + 2\bar{b} = (-6-1, 9+4) = (-7,13)$

$-a + \frac{1}{2}\bar{b} = \left(-2 - \frac{1}{4}, 3+1\right) = \left(\frac{-9}{4}, 4\right)$

$\frac{1}{3}(\bar{a} - \bar{b}) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{2}, -3-2\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{-5}{3}\right)$

⑧ Calcula coordenadas D para que $A(-1,-2)$, $B(4,-1)$, $C(5,2)$ y D sean paralelogramo.



$\vec{BD} = (BD_x, BD_y)$

$\vec{AB} = \vec{DC}$ // $\quad \vec{AB} = (5,1) \quad \vec{DC} = (5-x, 2-y)$

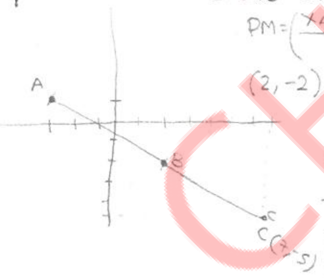
$(5,1) = (5-x, 2-y)$; $5-x = 5 \rightarrow x = 0$

$1 = 2-y \rightarrow y = 1 \qquad D = (0,1)$ //

$\vec{BA} + \vec{BC} = (-5,-1) + (1,3) \qquad \vec{BD}\ (-4,2) \quad B = (4,-1)$

$B + \vec{BD} = (4,-1) + (-4,2) = (4+(-4), (-1)+2) = (0,1) \rightarrow D$

⑨ Hallar $C\,(x,y)$ sabiendo que $B(2,-2)$ es el punto medio de $\vec{AC}$ siendo $A(-3,1)$



$PM = \left(\frac{X_A + X_C}{2}, \frac{Y_A + Y_C}{2}\right)$

$(2,-2) = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right)$

$2 = \frac{-3+x}{2}$; $x = 7$

$-2 = \frac{1+y}{2}$; $y = -5$ $\quad C(7,-5)$ //

$\vec{AB} = \vec{BC}$ (otra forma)

⑩ $\bar{a} = (2,-5)$ $\bar{b} = (-1,-3)$ $\bar{v} = (0,-1)$ $\bar{w} = (-1,0)$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = (2\cdot -1 + (-5)\cdot(-3)) = -2 + 15 = 13$

$\bar{a}\cdot\bar{v} = (2\cdot 0 + (-5)\cdot(-1)) = 5$

$\bar{a}\cdot\bar{w} = (2\cdot -1 + (-5)\cdot 0) = -2$

$\bar{b}\cdot\bar{b} = (-1\cdot -1 + (-3)\cdot -3) = 1 + 9 = 10$

$\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$

$\bar{w}\cdot\bar{v} = 0$

⑪ Calcular ángulo que forman $\vec{v}(-2,1)$ $\vec{w}(-2,6)$

$\alpha = \arccos \frac{u \cdot v}{|u|\cdot|v|}$

$\alpha = \arccos \frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}} = 45°$

⑫ Si $\bar{a} = (1,-3)$ $\bar{b} = (m,2)$ $\quad$ 1°42'7''

- Halla m para que a y b sean perpendiculares

$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ // $1m - 6 = 0$; $m = 6$

- Calcular ángulo formado por $\bar{a}$ y $\bar{c}$; $\bar{c}(4,2)$

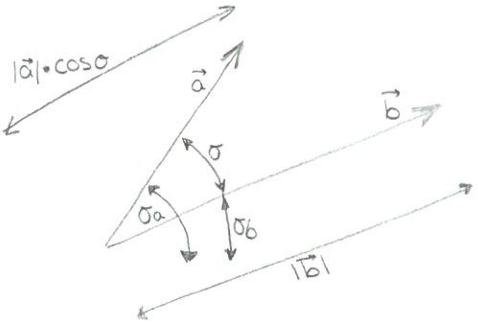
$\alpha = \arccos \frac{a\cdot c}{|a|\cdot|c|}$

$\alpha = \arccos \frac{-2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}} = 98'13°$

Producto escalar

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ σ=ángulo entre los dos vectores.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\sigma$



Módulo de vectores

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ $\sigma_a = \arctan \frac{a_y}{a_x}$

$\sigma = \sigma_a - \sigma_b$

El ángulo que forma con eje de abscisas se llama argumento del vector.

Ejercicios:

① Suma el vector $v = 3i + j - 2k$ y el vector $u = (0,3,2)$

$\vec{v} + \vec{u} = (3+0, 1+3, -2+2) = (3,4,0)$

② Resta el vector $u = (3,-1)$ al $v = (-2,3)$

$\vec{u} - \vec{v} = (3-(-2), -1-3) = (5,-4)$

③ Producto escalar entre vectores $\vec{v} = (3,-1)$ y $\vec{u} = (-2,3)$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (3 \cdot -2 + -1 \cdot 3) = -9$

Productopescalar

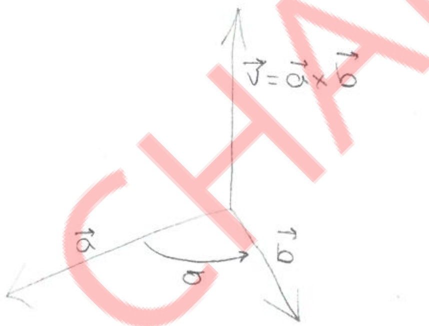
Tomar el vector tantas veces como indica el escalar. Da como resultado otro vector con misma dirección y mismo o contrario sentido.

Producto vectorial

El resultado es otro vector perpendicular a ambos. Es anticonmutativo

$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ // $\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$



Ejercicio

① Realiza producto vectorial entre $v = (3,-1)$ y $u = (-2,3)$

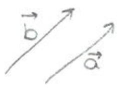
$$\begin{array}{cc} & i \quad j \\ \vec{v} = & (3, -1) \\ \vec{u} = & (-2, 3) \\ & i \quad j \end{array}$$

$\vec{v} \times \vec{u} = ((3 \cdot 3) - (-2 \cdot -1)) = 9 - 2 = 7\vec{K}$ //

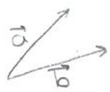
Tipos de vectores (en plano)

Cuando los vectores son coplanarios (mismo plano) se clasifican como:

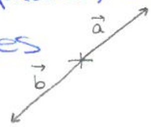
- colineales
- paralelos



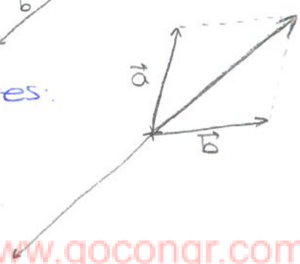
- concurrentes



- coincidentes



- equilibrantes:



(13) Considera vectores $\bar{x}(a,3)$ $\bar{y}(-1,b)$, Hallar a y b para que sean perpendiculares y que $|x| = 5$

$a^2+3^2=25$ // $a^2=16$ / $a=4$

$|\bar{x}| = \sqrt{a^2+3^2} = 5$ // $\bar{x}(4,3)$ $\bar{y}(-1,26)$

$\bar{x}\cdot\bar{y} = 0$ // $(4,3)\cdot(-1,10) = 26$

perpend.

(14) Hallar ángulo de $\bar{a}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ y $\bar{b}(1,1)$

$\alpha = \arccos \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|a|\cdot|b|}$ 0'36 0'64

$\alpha = \arccos \frac{-0'2}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}} = 98'13$

(15) $\vec{u} = (1,2,3)$ $\bar{v} = (2,0,1)$ $\bar{w} = (-1,3,0)$, hallar:

$|\bar{u}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$ $|\bar{w}| = \sqrt{-1^2+3^2+0^2} = \sqrt{10}$

$|\bar{v}| = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 5$ // $\bar{v}\cdot\bar{w} = -2$ // $\bar{u}\cdot\bar{w} = 5$ // $\bar{v}\cdot\bar{u} = 5$

ángulo comprendido entre esos dos vectores

$\cos(\widehat{\bar{u},\bar{v}})$ $\alpha = \arccos \frac{(1,2,3)\cdot(2,0,1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = 53'3$

$\cos(\widehat{\bar{v},\bar{w}})$ $\alpha = \arccos \frac{(2,0,1)\cdot(-1,3,0)}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{-1^2+3^2}} = \arccos \frac{-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = 106'43$

$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i+6j-4k-j = (2,5,-4)$

$\bar{u}\times\bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3k-3j+2k-9i = (-9,-3,5)$

$\bar{v}\times\bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4k+j-6j-2i = (-2,-5,4)$

$\bar{v}\times\bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6k-j-3i = (-3,-1,6)$

$(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w} = (2,5,-4)\cdot(-1,3,0) = 13$

$(\bar{v}\times\bar{w})\cdot\bar{u} = (-3,-1,6)\cdot(1,2,3) = 13$

~~(18) Encontrar vector unitario que forme un ángulo de 60° con vector $\bar{v}(0,2)$~~

(16) $\bar{u}(3,1,-1)$ $\bar{v}(2,3,4)$

- módulos: $|\bar{u}| = \sqrt{3^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$ // $|\bar{v}| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}$
- Productos vectoriales:

$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4i+9k-2j-2k-12j+3i = (7,-14,7) = (1,-2,1)$

$\bar{v}\times\bar{u} = -1\cdot(1,-2,1) = (-1,2,-1)$

- vector unitario perpendicular a ambos

$\bar{u}\times\bar{v} = (1,-2,1)$ $U_u = \frac{\vec{u}}{|\bar{u}|}$

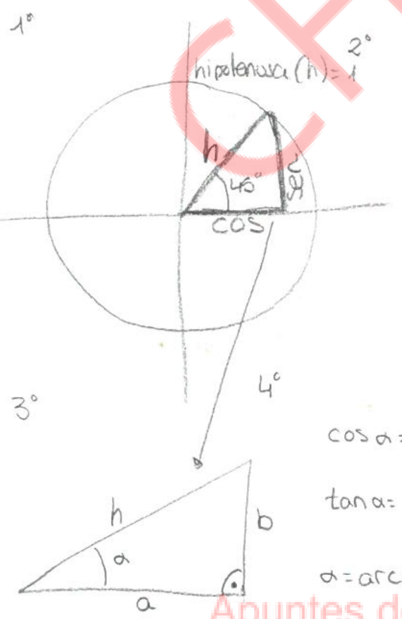
$U_u = \frac{(1,-2,1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(17) $\bar{u} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ $\bar{v} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, hallar el $\bar{u}\times\bar{v}$ y comprobar que ese vector es perpendicular a $\bar{u}$ y a $\bar{v}$.

$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -i-9k+2j+2k-3j+3i = (2,-1,-7)$

Producto escalar = 0 ⟶ es perpendicular

- $(2,-1,-7)\cdot\bar{u}(3,-1,1) = 0$ → son perpendiculares
- $(2,-1,-7)\cdot\bar{v}(2,-3,1) = 0$ → son perpendiculares



$\text{sen } 0° = 0$

$\text{sen } 90° = 1$

$\cos 0° = 0$

$\cos 90° = 1$

1° cos ⊖ sen ⊕

2° cos ⊕ sen ⊕

3° cos ⊖ sen ⊖

4° cos ⊕ sen ⊖

$\cos\alpha = \frac{a}{h}$ $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{h}$

$\tan\alpha = \frac{b}{a}$ $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{a}{h}\right)$ $\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{b}{h}\right)$

$\cos\sigma = \frac{\text{c. cont}}{h} = \frac{V_x}{|\bar{V}|}$

$\text{sen}\,\sigma = \frac{\text{c. op}}{h}$

$\text{tg}\,\sigma = \frac{\text{sen}\,\sigma}{\cos\sigma} = \frac{V_y}{V_x}$

$h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos\sigma$

$|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\text{sen}\,\sigma$ // $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$