UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA

UNAD

ALGEBRA LINEAL

–Tarea 2- Sistemas de ecuaciones lineales, Rectas y Planos

MARCO ANTONIO ZAMBRANO

Tutor

NUBIA PATRICIA LOPEZ RODRIGUEZ

Código 51947583

Grupo 100408_260

Bogotá D.C., noviembre 28 de 2019

INTRODUCCION

En el desarrollo de la tarea 2 de sistema de ecuaciones lineales, rectas y planos; se busca tener la comprensión de procedimiento y desarrollo de cada ejercicio que está en la guía con el fin de poner en práctica las lecciones del tema.

La idea en el desarrollo de los ejercicios es poder hacer un comparativo probatorio que demuestre la exactitud en el desarrollo e cada ejercicio en su procedimiento algebraico.

OBJETIVO

El objetivo general en el desarrollo de esta tarea 2 es tener los conocimientos esenciales para el manejo de ecuaciones y su demostración tanto en rectas como en planos.

DESARROLLO DE EJERCICIOS TAREA 2

Sistemas de ecuaciones lineales, Rectas y Planos

Ejercicio 2)

c) Considere el siguiente problema, defina el sistema de ecuaciones lineales que lo representa y soluciónelo por medio de la Regla de Cramer. Valide su resultado por medio de Geogebra*.

En un parque automovilístico hay carros de color negro, blanco y azul. Se sabe que el número de carros negros y blancos es cinco veces el número de azules. También los carros negros son el triplo de los azules y el total de carros blancos y azules suman 123. ¿Determine la cantidad de carros de cada color que se encuentran en el parque?

Condiciones:

1) el número de carros negros y blancos es cinco veces el número de azules:

$$y + z = 5x$$

2) los carros negros son el triplo de los azules:

$$y = 3x$$

3) el total de carros blancos y azules suman 123:

$$x + z = 123$$

Sistema de ecuaciones lineales:

$$P = \begin{cases} y + z = 5x \\ y = 3x \\ x + z = 123 \end{cases}$$

Entonces P es igual a:

$$P = \begin{cases} -5x + y + z = 0 \\ -3x + y = 0 \\ x + z = 123 \end{cases}$$

Esto tiene la siguiente representación matricial:

$$P = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 123 \end{bmatrix}$$

Si lo solucionamos utilizando la regla de Cramer obtenemos lo siguiente:

Primero, utilizamos los determinantes de las siguientes matrices

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 123 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-123}{-3} = 41$$

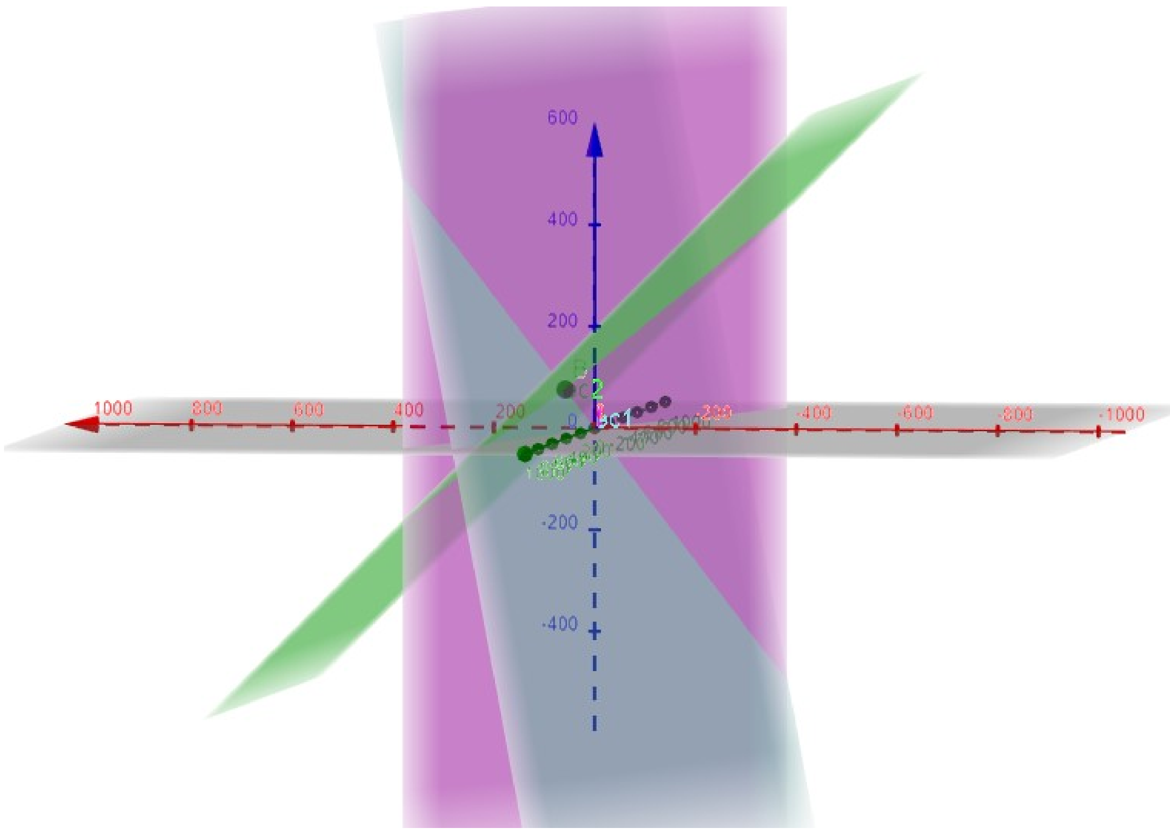
$$y = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 123 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-369}{-3} = 123$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 123 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-246}{-3} = 82$$

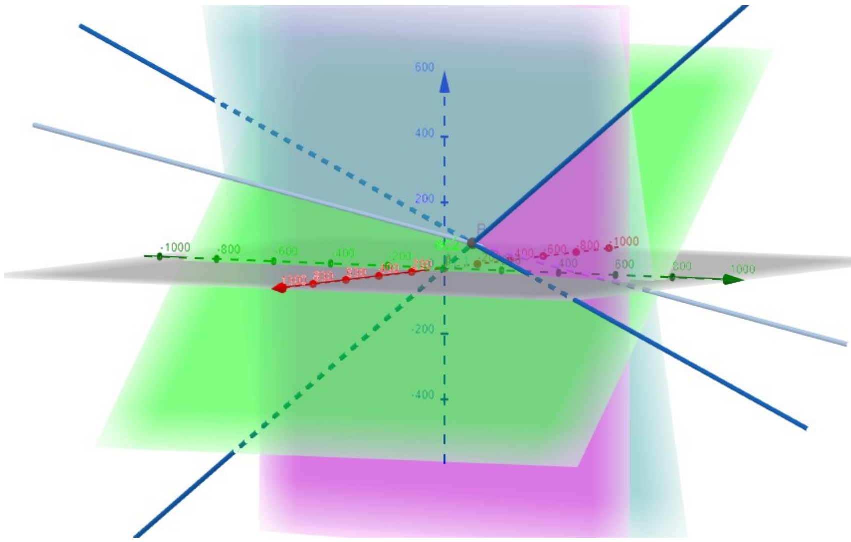
O sea que $x = 41, y = 123$ y $z = 82$.

Prueba con GeoGebra:

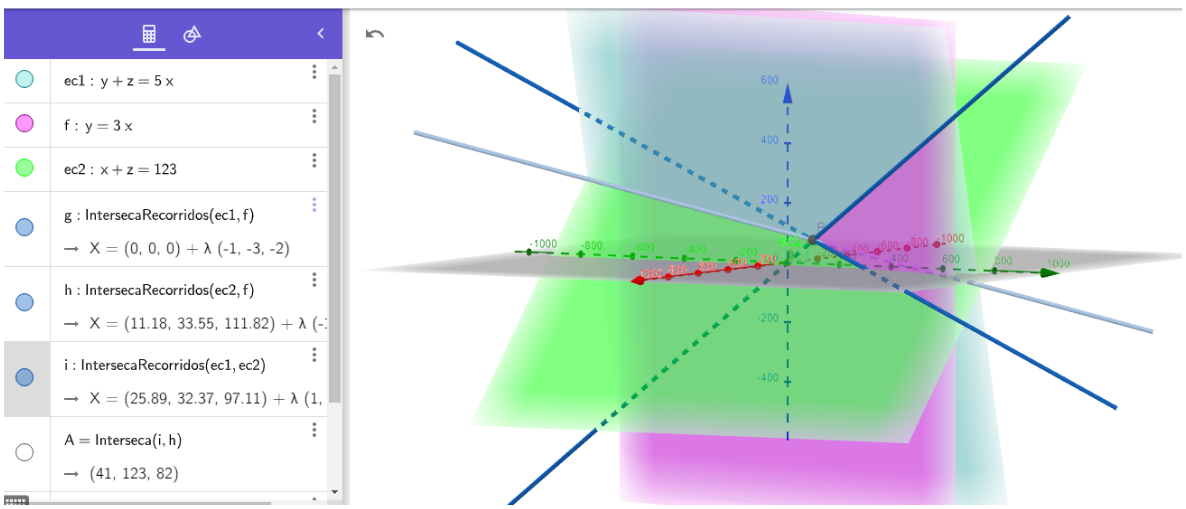
Primero, veamos una representación geométrica del problema. Cada una de nuestras ecuaciones de P representa un plano:

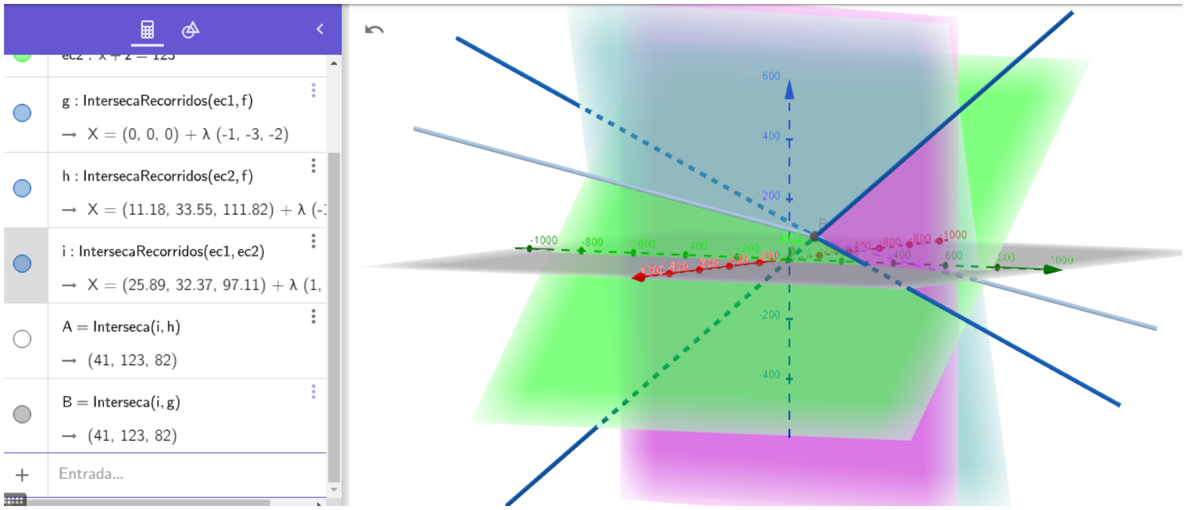


Ahora, podemos hallas las rectas de intersección entre estos planos:



Podemos observar que estas rectas tienen un punto de intersección común, si lo marcamos con las operaciones de GeoGebra obtenemos:





Como podemos ver, el punto (41, 123, 82) interseca a todos los planos de nuestro sistema de ecuaciones, también, por la extensión de los planos y las rectas de intersección sabemos que es el único punto de intersección en los planos, por lo tanto, es solución única de nuestro sistema de ecuaciones, y esto prueba, por medio de asistencia del ordenador, que la respuesta hallada mediante el método de Cramer es correcta.

Ejercicio 3)

c. Demostrar que las rectas $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{8-z}{4}$ y $\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{-4} = \frac{z+3}{-4}$ son paralelas.

Primero, llamemos $L_1 = \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{8-z}{4}$ y $L_2 = \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{-4} = \frac{z+3}{-4}$

Ahora, hallaremos la ecuación paramétrica de L_1 :

$$\frac{x-2}{3} = t, \qquad \frac{y-2}{4} = t, \qquad \frac{8-z}{4} = \mathrm{t}$$

Entonces:

$$x = 3t + 2, \qquad y = 4t + 2, \qquad z = -4t + 8$$

A partir de esto podemos hallar la ecuación vectorial de L_1:

$$(x, y, z) = (2,2,8) + t(3,4,-4)$$

Ahora, hallaremos la ecuación paramétrica de L_2 :

$$\frac{x-1}{3} = s, \qquad \frac{2-y}{-4} = s, \qquad \frac{z+3}{-4} = s$$

Entonces:

$$x = 3s + 1, \qquad y = 4s + 2, \qquad z = -4s - 3$$

A partir de esto podemos hallar la ecuación vectorial de L_2:

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + s(3,4, -4)$$

Ahora, podemos ver que los vectores dirección de L_1 y L_2 son el mismo $(3,4,-4)$,

Ahora, basta con probar que las rectas no tienen puntos en común para demostrar que son paralelas, esto lo haremos igualando la ecuación vectorial de cada recta:

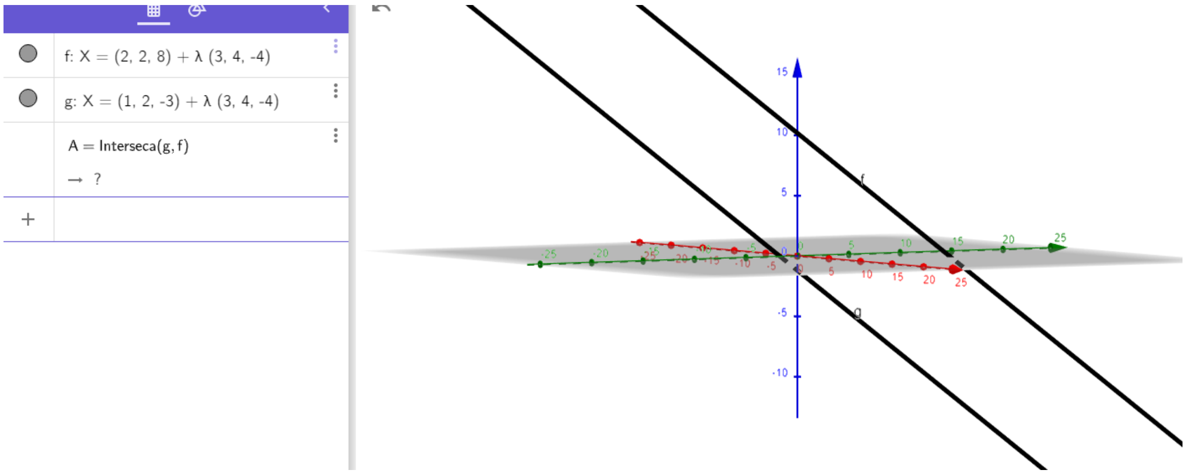
$$(2,2,8) + t(3,4,-4) = (1, 2, -3) + s(3,4, -4)$$

Entonces

$$(2 + 3t, 2 + 4t, 8 - 4t) = (1 + 3s, 2 + 4s, -3 - 4s)$$

$$\begin{cases} 2 + 3t = 1 + 3s \\ 2 + 4t = 2 + 4s \\ 8 - 4t = -3 - 4s \end{cases} = \begin{cases} 3t - 3s = -1 \\ 4t - 4s = 0 \\ -4t + 4s = -11 \end{cases}$$

Ahora, este sistema no tiene solución como podemos ver, las últimas dos ecuaciones deberían ser iguales a cero, pero una es igual a -11, haciendo así que no haya solución, por tanto, las rectas son paralelas.



En la anterior imagen podemos ver, con asistencia del ordenador que ambas rectas no comparten ningún punto de intersección en el espacio (al menos en cuanto es computable por el ordenador).

Ejercicio 4)

c) La recta pasa por los puntos (2,4,6) y (-6,9,8). Defina las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas.

Una recta se construye con un punto y un vector dirección, en este caso utilizaremos como punto (2,4,6) y nuestro vector dirección (-8,5,2) que es la diferencia entre los dos puntos o sea el vector entre los dos puntos.

Ahora, con estos datos construimos la ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (2,4,6) + \lambda(-8,5,2)$$

Usando la ecuación vectorial podemos construir las ecuaciones paramétricas y simétricas.

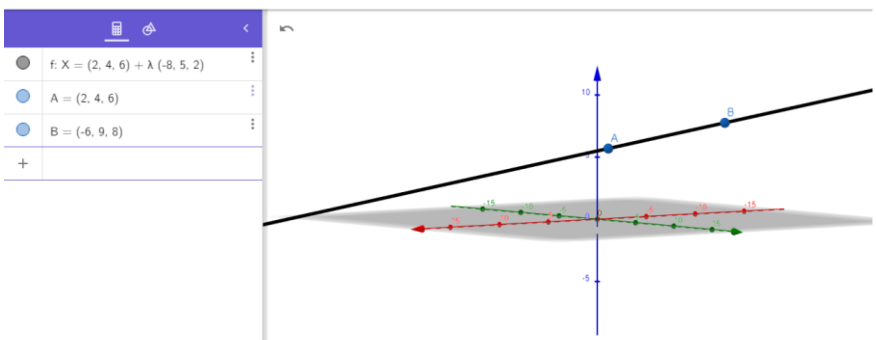
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - 8\lambda \\ y = 5 + 5\lambda \\ z = 6 + 2\lambda \end{cases}$$

Ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-2}{-8} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-6}{2}$$

Utilizamos ahora la ecuación vectorial cual utilizamos para graficar en GeoGebra, allí, construimos manualmente los puntos A(2,4,6) y B(-6,9,8) y evidenciamos con ayuda del ordenador, que la recta descrita por las ecuaciones anteriores pasa por los puntos del enunciado del problema.

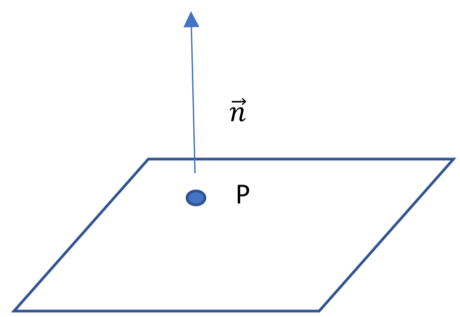


Ejercicio 5)

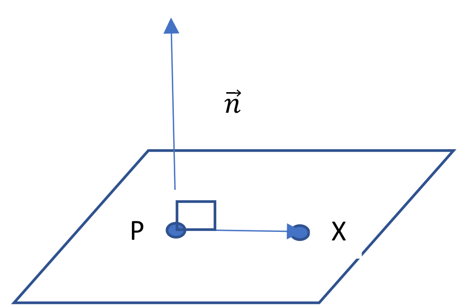
C) Encontrar la ecuación del plano, cuyo vector normal es $\vec{n} = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ y pasa por el punto (4,-6,10). Desarrolle claramente el paso a paso necesario para llegar a dicha ecuación y grafique el plano correspondiente.

Primero, estableceremos que como $\vec{n} = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ entonces $\vec{n} = (6, -3, -3)$. Y estableceremos que P=(4,-6,10)

Ahora, supongamos a nuestro plano de la siguiente manera



Ahora construiremos un punto cualquiera X de coordenadas (x,y,x) y construiremos un vector desde P hasta X, tal que $\overrightarrow{px} = x - p = (x - 4, y + 6. z - 10)$. Como $\vec{n}$ es normal al plano, podemos asegurar que $\overrightarrow{px} \perp \vec{n}$, por tanto $\overrightarrow{px} \cdot \vec{n} = 0$.



Como $\overrightarrow{px} \cdot \vec{n} = 0$ entonces:

$$(6, -3, -3) \cdot (x - 4, y + 6, z - 10) = 0$$

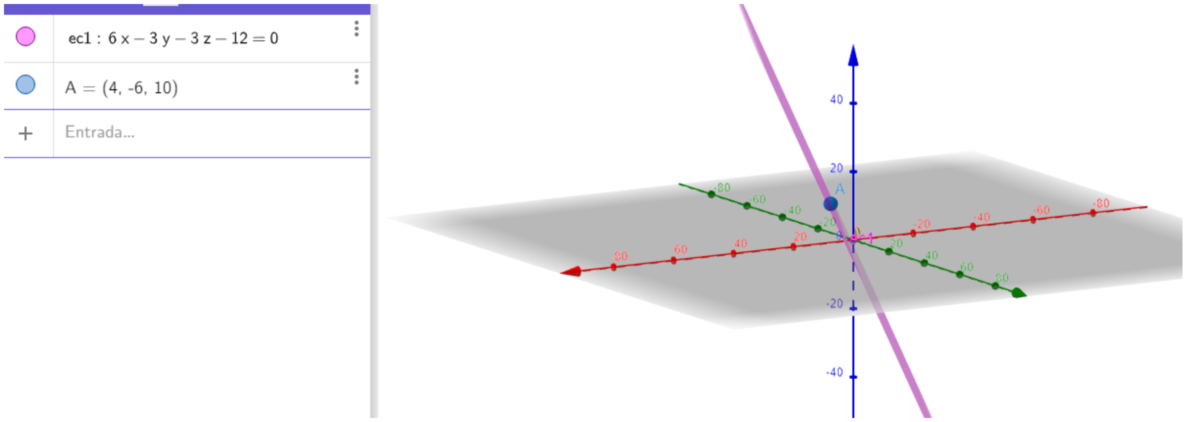
así que

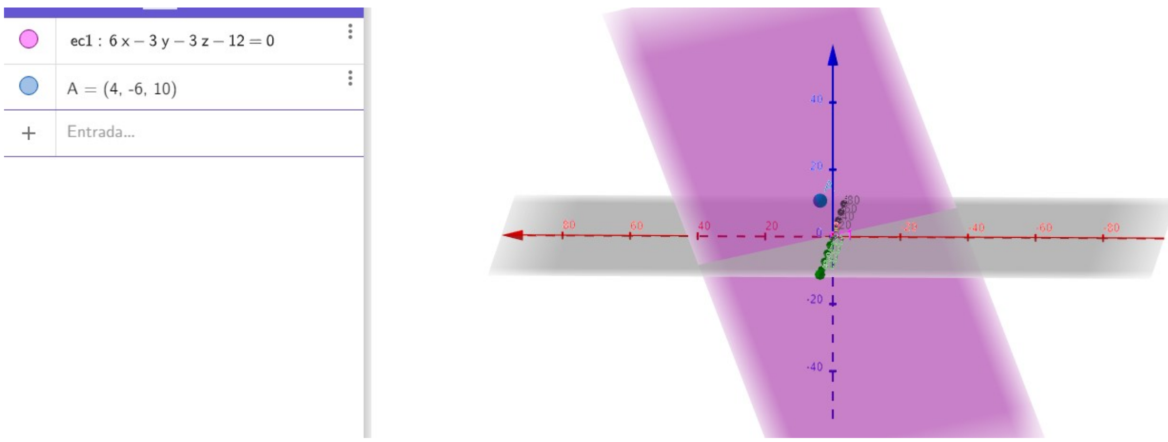
$$6(x - 4) - 3(y + 6) - 3(z - 10) = 0$$

$$6x - 24 - 3y - 18 - 3z + 30 = 0$$

$$6x - 3y - 3z - 12 = 0$$

Que es la ecuación del plano, a continuación, se ha graficado el plano, y el punto, para que se puede tener idea más clara sobre esto.


ec1 : 6 x − 3 y − 3 z − 12 = 0
A = (4, -6, 10)
Entrada...


ec1 : 6 x − 3 y − 3 z − 12 = 0
A = (4, -6, 10)
Entrada...

CONCLUSIONES

En el desarrollo a través de las lecturas y ejemplos aportados en el stallybus pude desarrollar los ejercicios y ademas fortalecer conceptos esenciales para saber el porqué del procedimiento para solucionar cada ejercicio y los temas tratados.

Bibliografía

Mesa, F., Alirio, E., & Fernández, S. O. (2012). Introducción al álgebra línea

Mesa, F., Alirio, E., & Fernández, S. O. (2012). Introducción al álgebra lineal. Bogotá, CO: Ecoe Ediciones.

Módulo Algebra Lineal. Bogotá, UNAD.