Priporočeno predznanje iz MATEMATIKE

VSEBINA:

I. Računanje z ulomki in potencami. Razstavljanje izrazov.

II. Linearna funkcija, linearna enačba in neenačba. Enačbe premic.

   Linearna funkcija, enačba in neenačba

   O (različnih) enačbah premic

III. Kvadratna funkcija, enačba in neenačba. Polinomi, polinomska enačba in neenačba. Racionalna funkcija, racionalna enačba in neenačba. Enačbe krožnice, elipse in hiperbole.

   Kvadratna funkcija, enačba in neenačba

   Polinomi, polinomska enačba in neenačba

   Racionalna funkcija, racionalna enačba in neenačba

   Enačbe krožnice, elipse in hiperbole

I. RAČUNANJE Z ULOMKI IN POTENCAMI. RAZSTAVLJANJE IZRAZOV.

Dogovor: Simboli, ki jih bomo uporabljali za označevanje množic števil:

- *naravna števila:* števila s katerimi štejemo, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- *cela števila:* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- *racionalna števila:* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$;
- *realna števila:* $\mathbb{R}$.

Opomba: Za zgoraj omenjene množice števil velja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Lastnosti računanja z realnimi števili:

- $a + b = b + a$, (zakon komutativnosti seštevanja)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, (zakon asociativnosti seštevanja)
- $a \cdot b = b \cdot a$, (zakon komutativnosti množenja)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, (zakon asociativnosti množenja)
- $(a + b)c = ac + bc$. (distributivnostni zakon)

Računanje s potencami (z naravnimi eksponenti):

- Definicija: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - krat}}$;
- Dogovor: $a^1 = a$.

Lastnosti računanja s potencami:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Pogoste napake: Zgornji formuli študentje včasih pomešajo in pridejo do (nepravilnih) različic $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ in $(a^m)^n = a^{m+n}$. Ti dve različici seveda ne držita, kot se lahko prepričamo na primerih:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n : &\quad 2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5 \\ a^{m \cdot n} : &\quad 2^{3 \cdot 2} = 2^6 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} (a^m)^n : &\quad (2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6 \\ a^{m+n} : &\quad 2^{2+3} = 2^5 . \end{aligned}$$

Formule: (ki si jih lahko vsak študent hitro izpelje sam)

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, (kvadrat dvočlenika)
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, (kub dvočlenika)
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, (razlika kvadratov)
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, (razlika kubov)

Na kazalo

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, (vsota kubov)
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. (razlika potenc)

Pogoste napake:

- Večkrat pride do nepravilnega računa $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, protiprimer:

$$\begin{aligned} (a-b)^2: &\quad (2-1)^2 = 1^2 \\ a^2 - b^2: &\quad 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3\,; \end{aligned}$$

- Včasih kakšen študent uporabi formulo za vsoto kvadratov, ki je podobna formuli za razliko kvadratov in je nepravila (formula za vsoto kvadratov ne obstaja): $a^2+b^2 = (a+b)(a+b)$, protiprimer:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2: &\quad 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \\ (a+b)(a+b): &\quad (2+1)(2+1) = 9\,. \end{aligned}$$

Lastnosti računanja z racionalnimi števili: (v vseh formulah, ki vsebujejo ulomke, je število v imenovalcu ulomka različno od 0)

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{db}$, (seštevanje ulomkov)
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{db}$, (množenje ulomkov)
- $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, (razširjanje oz. krajšanje ulomka)
- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. (deljenje ulomkov)

Pogoste napake: večkrat študenti za računanje z ulomki "poenostavijo" v formuli $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d+b}$ in $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$, ki sta seveda napačni, protiprimera:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d}: &\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{a+c}{d+b}: &\quad \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c}: &\quad \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{b} + \frac{a}{c}: &\quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2\,. \end{aligned}$$

Računanje s potencami: (v vseh formulah je osnova potence strogo večja od nič)

- Definicija 1: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Definicija 2: $\sqrt[n]{a} = b$ če velja $b^n = a$ in $b \geq 0$.

Lastnosti računanja s potencami (z racionalnimi eksponenti):

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,
- $a^n b^n = (ab)^n$,
- $a^0 = 1$,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$,
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$,
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

II. LINEARNA FUNKCIJA, LINEARNA ENAČBA IN NEENAČBA. ENAČBE PREMIC.

LINEARNA FUNKCIJA, ENAČBA IN NEENAČBA

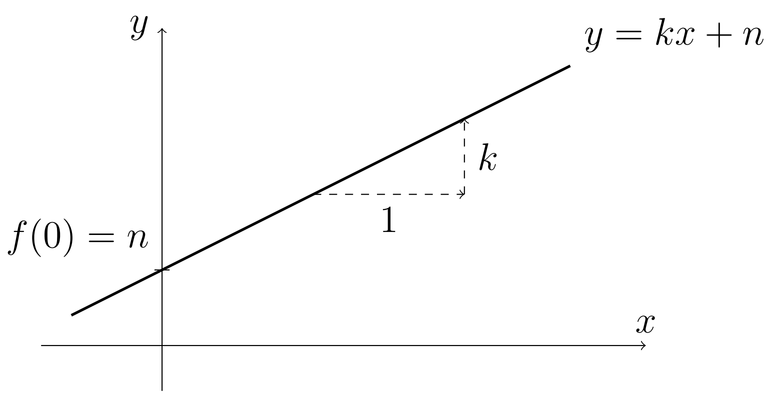
Definicija: *Linearna funkcija* je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = kx + n,\ k, n \in \mathbb{R}\,.$$

Konstanto n imenujemo *začetna vrednost*, konstranto k pa *smerni koeficient* funkcije.

Opomba: Imena v zgornji definiciji so naravna, če se zavedamo, da je graf linearne funkcije premica (lat. *linea*), ki seka ordinatno os v $f(0) = n$. Njen naklonski koeficient lahko interpretiramo po principu "če se iz premice premaknemo za eno enoto na desno, se moramo premakniti k enot navzgor (če je k pozitiven) ali navzdol (če je k negativen), da pridemo spet nazaj na premico".

Graf:



Izračun smernega koeficienta: Za izračun smernega koeficienta premice, ki poteka skozi (različni) točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ (kjer $x_1 \neq x_2$), uporabimo formulo:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Opomba: Iz geometrijskega pomena smernega koeficienta in iz zgornje formule je razvidno, da so grafi vseh linearnih funkcij premice, vse premice pa niso grafi linearnih funkcij. Če vzamemo npr. premico skozi točki $T_1(1, 0)$ in $T_2(1, 1)$ dobimo premico z enačbo $x = 1$, ki pa ni graf nobene linearne funkcije.

Linearna enačba: *Linearna enačba* je enačba oblike $kx + n = 0$ $(k \neq 0)$. Njena rešitev je $x = -\frac{n}{k}$.

Opomba: Geometrijski pomen linearne enačbe: sprašujemo se po točki v kateri graf linearne funkcije seka abscisno os.

Linearna neenačba: V spodnji tabeli so predstavljene različne oblike *linearne neenačbe* in njihovih rešitev (glede na predznak koeficienta $k \neq 0$).

		$k > 0$	$k < 0$
(I)	$kx + n > 0$	$x > -\frac{n}{k}$	$x < -\frac{n}{k}$
(II)	$kx + n \geq 0$	$x \geq -\frac{n}{k}$	$x \leq -\frac{n}{k}$
(III)	$kx + n < 0$	$x < -\frac{n}{k}$	$x > -\frac{n}{k}$
(IV)	$kx + n \leq 0$	$x \leq -\frac{n}{k}$	$x \geq -\frac{n}{k}$

Opomba: Geometrijski pomen linearne neenačbe: sprašujemo se po točkah v katerih graf linearne funkcije leži nad abscisno osjo (I), nad ali na abscisni osi (II), pod abscisno osjo (III) in pod ali na abscisni osi (IV).

O (RAZLIČNIH) ENAČBAH PREMIC

Eksplicitna oblika enačbe premice: $y = kx + n,\ k, n \in \mathbb{R}$
Geometrijski pomen koeficientov k in n je opisan že na prejšnjih straneh. Videli smo, da so grafi linearnih funcij premice. Izkaže se, da se pa vseh premic ne da predstaviti kot graf neke linearne funkcije. Lep protiprimer so vse premice, ki so vzporedne y osi. Njihove enačbe so $x = a$, za nek $a \in \mathbb{R}$.

Implicitna enačba premice: $ax + by = c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$
Z implicitno obliko enačbe lahko predstavimo vse premice v ravnini. Medtem ko sta geometrijska pomena parametrov a in b malce neočitna (njun geometrijski pomen bomo spoznali pri analitični geometriji), je pomen parametra c razdelitev premic na tiste, ki potekajo skozi izhodišče koordinatnega sistema in tiste ki ne. Konkretneje: če je $c = 0$, potem premica poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema, če pa je $c \neq 0$, pa ne.

Odsekovna enačba premice: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$
Tudi z odsekovno obliko enačbe premice ne moremo predstaviti vseh premic v ravnini. Izjeme so premice, ki so vzporedne osi x in tiste, ki so vzporedne osi y. Geometrijski pomen parametra n je enak kot pri eksplicitni obliki enačbe premice: opisana premica seka y-os pri vrednosti n (če seveda premica ni vzporedna y-osi, v tem primeru je enačba premice oblike $\frac{x}{m} = 1$). Parameter m nam pove, da premica seka x-os pri vrednosti m (če premica ni vzporedna x-osi, v tem primeru je enačba premice oblike $\frac{y}{n} = 1$).

III. KVADRATNA FUNKCIJA, ENAČBA IN NEENAČBA. POLINOMI, POLINOMSKA ENAČBA IN NEENAČBA. RACIONALNA FUNKCIJA, RACIONALNA ENAČBA IN NEENAČBA. ENAČBE KROŽNICE, ELIPSE IN HIPERBOLE.

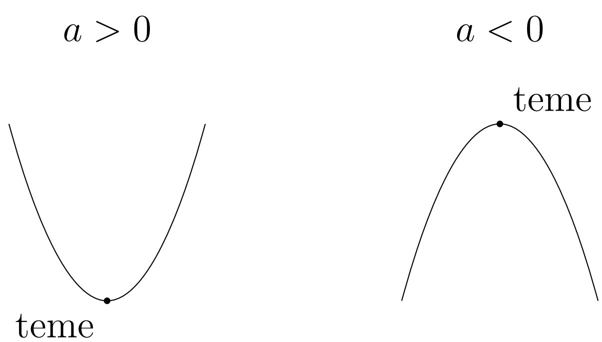
KVADRATNA FUNKCIJA, ENAČBA IN NEENAČBA

Definicija: *Kvadratna funkcija* je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R} \text{ in } a \neq 0.$$

Konstanto a imenujemo *kvadratni (ali vodilni) koeficient*, konstranto b *linearni koeficient* in konstanto c *prosti člen* kvadratne funkcije.

Graf: Graf kvadratne funkcije je kvadratna parabola. Smer odprtosti kvadratne parabole je odvisna od predznaka kvadratnega koeficienta a. Če je $a > 0$, je parabola odprta v pozitivni smeri osi y. V tem primeru ima parabola minimum v točki, ki jo imenujemo *teme parabole.* Če je $a < 0$, je parabola odprta v smeri negativnega dela y osi, v temenu pa doseže maksimum.



Kvadratna enačba: *Kvadratna enačba* je enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Njeni rešitvi sta $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Vietovo pravilo: Pri reševanju kvadratne enačbe si lahko pomagamo tudi s pravilom:

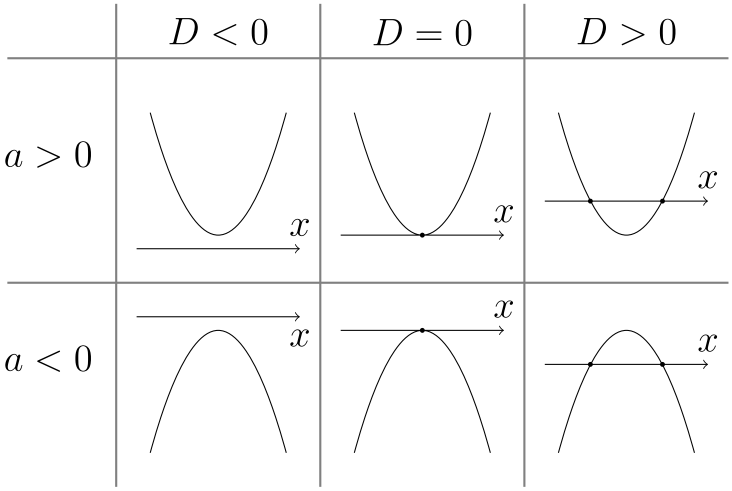
$$x^2 + (a + b)x + a \cdot b = (x + a)(x + b).$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta potem $x_1 = -a$ in $x_2 = -b$.

Opomba: Kvadratna enačba ima lahko dve različni realni rešitvi, eno dvojno realno rešitev ali pa nima realnih rešitev. Katera izmed možnosti drži za posamezno enačbo, je hitro razvidno iz *diskriminante* $D = b^2 - 4ac$. Če je $D > 0$, je njen kvadratni koren pozitivno realno število, zato dobimo dve različni realni rešitvi kvadratne enačbe. Če je $D = 0$, dobimo eno samo (dvojno) rešitev, saj je $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Če pa velja $D < 0$, pa enačba nima realnih[1] rešitev.

Graf-bolj natančno: Prejšnjo tabelo, v kateri smo predstavili obliki grafa v odvisnosti od kvadratnega koeficienta funkcije, lahko zdaj dopolnimo s slikami, ki orišejo vpliv diskriminante D na graf kvadratne funkcije.

[1] Dobimo dve konjugirani kompleksni rešitvi kvadratne enačbe, saj je $\sqrt{D}$ imaginarno število.



Kvadratna neenačba: *Kvadratna neenačba* je neenačba naslednjih oblik

$$\left.\begin{array}{r} \text{(I) } ax^2 + bx + c > 0, \\ \text{(II) } ax^2 + bx + c \geq 0, \\ \text{(III) } ax^2 + bx + c < 0, \\ \text{(IV) } ax^2 + bx + c \leq 0. \end{array}\right\} a \neq 0$$

Reševanja kvadratne neenačbe se lahko lotimo računsko ali grafično. Pri obeh načinih potrebujemo najprej rešitve, $x_{1,2}$, kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, če le obstajata (t.j. če nista kompleksni).

Reševanje kvadratne neenačbe:
I. način (računsko): Če kvadratna enačba, ki pripada kvadratni neenačbi nima (realnih) rešitev, je izraz ax^2+bx+c vedno istega predznaka (saj kvadratna funkcija menja predznak le v rešitvah kvadratne enačbe). Rešitve kvadratnih neenačb so tako:

tip neenačbe	$a > 0$	$a < 0$
(I) in (II)	$x \in \mathbb{R}$	$\emptyset$
(III) in (IV)	$\emptyset$	$x \in \mathbb{R}$

Če obstajata realni ničli pripadajoče kvadratne enačbe $x_{1,2}$, lahko desno stran neenačb (vseh tipov) faktoriziramo:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ko rešujemo neenačbe zgoraj opisanih tipov se lahko vprašamo, za katera realna števila x bo produkt dveh števil $(x - x_1)$ in $(x - x_2)$:

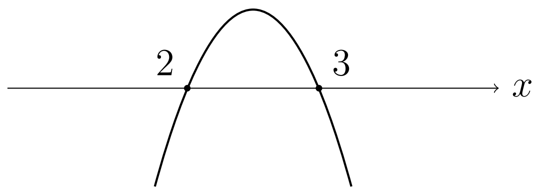
- pozitiven (I), nenegativen (II), negativen (III) ali nepozitiven (IV), ko je $a > 0$,
- negativen (I), nepozitiven (II), pozitiven (III) ali nenegativen (IV), ko je $a < 0$.

Primer: Rešimo neenačbo $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$. Levo stran faktoriziramo s pomočjo Vietovih pravil $-x^2 + 5x - 6 = -(x^2 - 5x + 6) = -(x - 2)(x - 3)$. Ker želimo, da je produkt števil na levi strani neenačbe nenegativen, mora veljati $(x - 2)(x - 3) \leq 0$. Produkt dveh realnih števil ($(x - 2)$ in $(x - 3)$) je nepozitiven, ko veljata $x - 2 \geq 0$ in $x - 3 \leq 0$ ali pa $x - 2 \leq 0$ in

$x - 3 \geq 0$. Prvi pogoj velja, ko veljata neenačbi $x \geq 2$ in $x \leq 3$, torej, ko je $x \in [2, 3]$. Drugi pogoj pa velja, ko veljata neenačbi $x \leq 2$ in $x \geq 3$, kar pa ne drži za nobeno realno število x (ne obstaja realno število x, ki je hkrati manjše od 2 in večje od 3).
Rešitev neenačbe so $x \in [2, 3]$.

II. način (grafično): Levo stran neenačbe predstavimo z grafom kvadratne funkcije. Rešitve neenačbe so tisti x (abscise točk), za katere bo graf kvadratne funkcije ležal strogo nad abscisno osjo (I), nad ali na abscisni osi (II), strogo pod abscisno osjo (III) ali pa pod ali na abscisni osi (IV).

Primer: Rešimo neenačbo $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$. Že zgoraj smo ugotovili, da lahko levo stran zapišemo v faktorizirani obliki $-(x - 2)(x - 3)$, od koder odčitamo ničli kvadratne funkcije $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$. Skicirajmo graf kvadratne funkcije.



Rešitev kvadratne neenačbe so tisti realni x, za katere je graf parabole nad ali na abscisni osi, to je med obema ničlama (vključno z ničlama).
Rešitev neenačbe so $x \in [2, 3]$.

Pogoste napake: V primeru reševanja kvadratne neenačbe $x^2 \geq 1$ večkrat pride do napačnih rešitev $x \geq 1$ ali celo $x \geq \pm 1$ (katera realna števila so tukaj mišljena sploh ni jasno). Če dano neenačbo zapišemo v obliki $x^2 - 1 \geq 0$ oz. $(x - 1)(x + 1) \geq 0$ hitro vidimo, da je rešitev $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

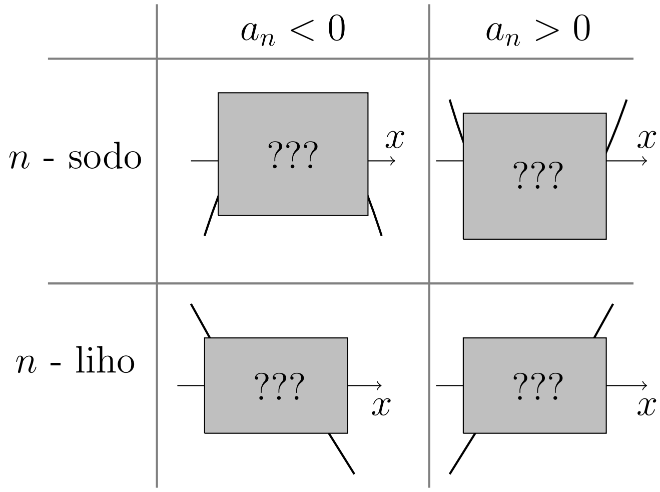
POLINOMI, POLINOMSKA ENAČBA IN NEENAČBA

Definicija: *Polinom stopnje* n je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n,\ a_{n-1},\ \ldots, a_1,\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ in } a_n \neq 0.$$

Konstanto a_n imenujemo *vodilni koeficient*, konstranto a_0 pa *prosti člen* polinoma.
Opomba: Ničelni polinom $p(x) = 0$ je polinom stopnje 0 (čeprav je njegov vodilni koeficient enak 0).

Graf: Graf polinoma je odvisen od njegove stopnje (še posebej od dejstva ali je n sodo ali liho število) in od predznaka vodilnega koeficienta. Na spodnji skici grafov je vmesni del grafa (označen s sivim pravokotnikom) neznanka, odvisen je od preostalih členov polinoma.



Polinomska enačba: *Polinomska enačba* je enačba oblike $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$). Polinomska enačba ima lahko največ n različnih rešitev. Medtem, ko poznamo rešitve polinomskih enačb reda 2 (to so ravno kvadratne enačbe), za enačbe višjih redov ne bomo podali formul (za nekatere enačbe formule sploh ne obstajajo).

Omenimo *Hornerjev algoritem* za iskanje ničel polinoma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. S pomočjo tega algoritma iščemo ničle med deljitelji prostega člena a_0. Postopek si poglejmo na primeru:

Primer: Reši enačbo $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.
Kandidati za ničle, po Hornerjevem algoritmu, so 2, 1, -1 in -2. Preizkusimo jih:

	1	2	− 1	− 2	
		2	8	14	
2	1	4	7	12	⇒ 2 ni ničla danega polinoma

	1	2	− 1	− 2	
		1	3	2	
1	1	3	2	0	⇒ 1 je ničla danega polinoma

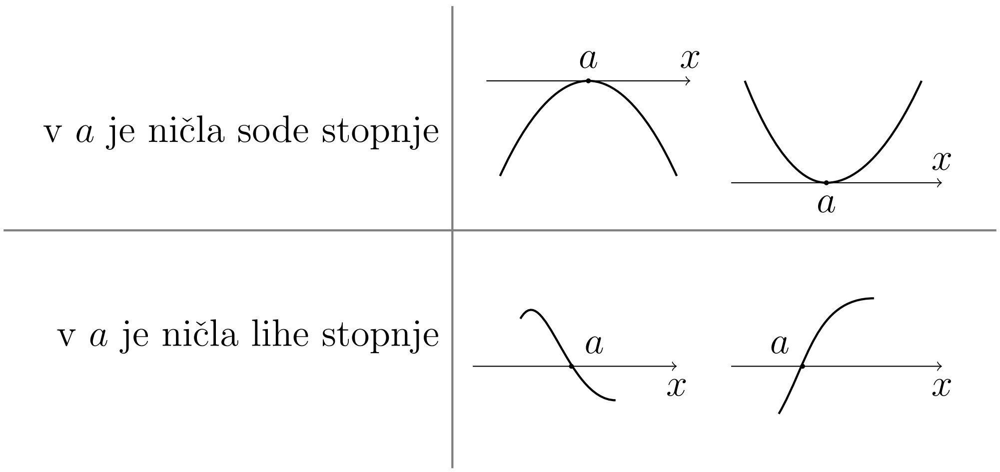
koeficienti kvadratnega polinoma

Število 1 je ničla danega polinoma, 1, 3 in 2 pa so koeficienti kvadratnega polinoma, ki ga dobimo pri faktorizaciji danega polinoma: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$. Da rešimo polinomsko enačbo, faktoriziramo še kvadratni polinom (npr. s pomočjo Vietovih formul):

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 1)(x^2 + 3x + 2) = 0$$
$$(x - 1)(x + 2)(x + 1) = 0$$

Rešitve polinomske enačbe so $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ in $x_3 = -1$.

Graf - bolj natančno: Opišimo še pomen stopnje ničle polinomske enačbe na obliko grafa polinoma. Če je a ničla sode stopnje (t.j., če se v faktorizirani obliki polinoma pojavi a le v členu $(x-a)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$), potem polinom v a ne spreminja predznaka. Graf polinoma se v a osi x le dotakne. Če je a ničla lihe stopnje (t.j., če se v faktorizirani obliki polinoma pojavi a le v členu $(x-a)^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$), potem polinom v a spremeni predznak. Graf polinoma v a seka os x.

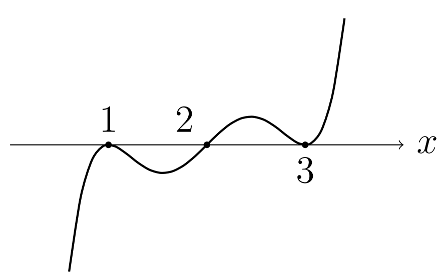


Reševanje polinomske neenačbe:
I. način (računsko): Če poznamo vse ničle polinoma, zapišemo polinom v faktorizirani obliki in potem sklepamo na predznak polinoma. Lahko pa tudi izračunamo vrednost polinoma v neki točki (ne ničli), potem pa sklepamo na predznake polinoma v intervalih med različnimi ničlami po principu: v ničlah lihe stopnje polinom spremeni predznak, v ničlah sode stopnje pa ne.

Primer: Reši neenačbo $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 \geq 0$.
Rešitve enačbe $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2$ so $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ in $x_3 = 3$. Ker je v teh točkah $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 = 0$, so te točke tudi v množici rešitev dane neenačbe. Ker sta faktorja $(x-1)^2$ in $(x-3)^2$ vedno nenegativna, bo produkt na levi strani neenakosti pozitiven, ko bo pozitiven $(x-2)$, to pa je za $x > 2$. Rešitev neenačbe so tako vsa števila iz množice $\{1\} \cup [2, \infty)$.

II. način (grafično): Skiciramo graf polinoma in rešitev odčitamo iz grafa.

Primer: Reši neenačbo $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 \geq 0$.
Vodilni koeficient danega polinoma je 1, njegove ničle pa $x_1 = 1$ (2. stopnje), $x_2 = 2$ (1. stopnje) in $x_3 = 3$ (2. stopnje). Skicirajmo graf:



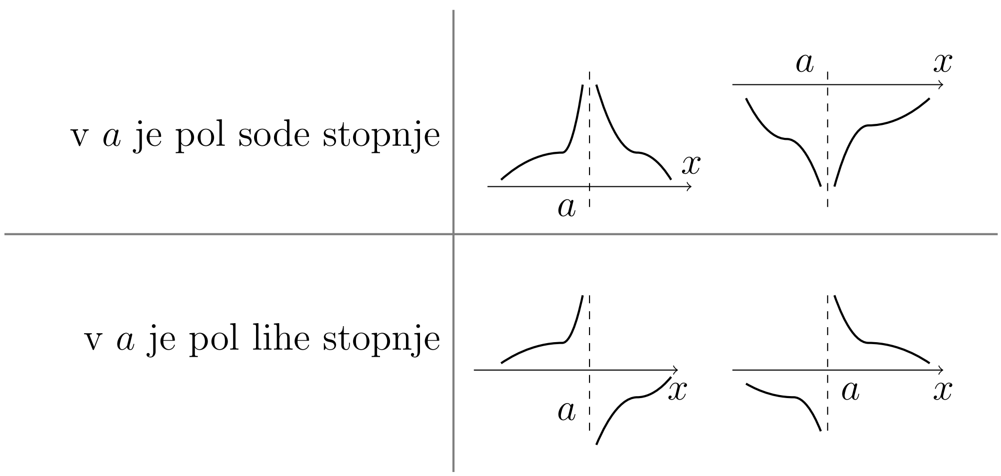
Rešitve dane neenačbe sovpadajo z abscisami točk, kjer graf polinoma leži nad ali na x osi, torej: $\{1\} \cup [2, \infty)$.

RACIONALNA FUNKCIJA, RACIONALNA ENAČBA IN NEENAČBA

Definicija: Racionalna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ tuja si polinoma (t.j. nimata skupnih ničel) in $q(x) \neq 0$.

Graf: Na obliko grafa racionalne funkcije vplivajo ničle (in njihova stopnja), poli (in njihova stopnja) ter asimptote.

- **Ničle:** ničle racionalne funkcije sovpadajo z ničlami polinoma p. Za vpliv stopnje ničle na graf poglejte vpliv stopnje ničle na graf polinoma.
- **Poli:** poli racionalne funkcije sovpadajo z ničlami polinoma q. Če je v a pol lihe stopnje, funkcija menja predznak, če pa je v a pol sode stopnje, pa ne.



- **Asimptote:** Ločimo tri primere:
  1. Stopnja polinoma v števcu je manjša od stopnje polinoma v imenovalcu (torej $n < m$): vodoravna asimptota je x os.
  2. Stopnji polinomov sta enaki ($n = m$): vodoravna asimptota je premica $y = \frac{a_n}{b_m}$.
  3. Stopnja polinoma v števcu je večja od stopnje polinoma v imenovalcu ($n > m$): asimptota je kvocient, ki ga dobimo, ko delimo $p(x) : q(x)$.
     Opomba: Ničla ostanka pri deljenju $p(x) : q(x)$ nam pove kje graf racionalne funkcije seka asimptoto.

Primer: Določi ničle, pole in asimptote racionalne funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$ ter skiciraj njen graf.

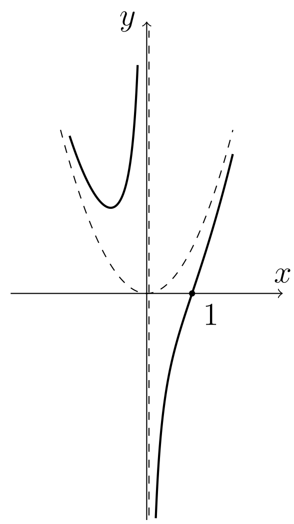
- **Ničle:** $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$
  Vidimo, da je ena ničla enaka $x_1 = 1$ (1. stopnje). Preostale ničle dobimo iz enačbe $x^2 + x + 1 = 0$, ker pa je diskriminanta kvadratne funkcije, ki nastopa na levi strani kvadratne enačbe enaka $D = 1 - 4 = -3$, je 1 edina ničla racionalne funkcije.
- **Poli:** $x = 0$

- **Asimptota:**

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^3 - 1\big) : x = x^2 + \dfrac{-1}{x}. \\ \underline{-\,x^3} \\ \quad\ \ -1 \end{array}$$

Enačba asimptote: $y = x^2$.
Opomba: Ostanek -1 nam pove, da graf racionalne funkcije ne seka asimptote, saj ta ostanek nikoli ni enak 0.

- **Graf:**

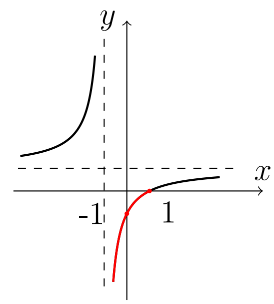


Reševanje racionalne neenačbe:
I. način (računsko): Neenakost $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ bo držala za tista realna števila x, za katera bosta števec in imenovalec hkrati pozitivna, ali hkrati negativna. Torej $p(x) > 0$ in $q(x) > 0$ ali $p(x) < 0$ in $q(x) < 0$. Analogno sklepamo še pri preostalih tipih neenačb (vrednost ulomka je negativna, ko sta števec in imenovalec nasprotno predznačena).
Primer 1: Reši neenačbo: $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$.
Prva možnost: $x - 1 \leq 0$ (oz. $x \leq 1$) in $x + 1 > 0$ (oz. $x > -1$) nam vrne rešitev $x \in (-1, 1]$.
Druga možnost: $x - 1 \geq 0$ (oz. $x \geq 1$) in $x + 1 < 0$ (oz. $x < -1$) nima rešitev.
Rešitev neenačbe: $x \in (-1, 1]$.
Primer 2: Reši neenačbo: $\frac{x^3-1}{x} > 0$.
Prva možnost: $x^3 - 1 > 0$ in $x > 0$. Rešimo neenačbo $x^3 - 1 > 0$ tako, da levo stran faktoriziramo in neenačbo prepišemo v obliko $(x-1)(x^2+x+1) > 0$. Prej smo ugotovili, da je $(x^2 + x + 1) > 0$, zato bo produkt polinomov pozitiven natanko tedaj, ko bo veljalo $(x-1) > 0$ oz. $x > 1$. Ker je imenovalec pozitiven ko je $x > 0$, je ulomek pozitiven, ko $x \in (1, \infty)$.
Druga možnost: $x^3 - 1 < 0$ in $x < 0$. Faktoriziramo levo stran prve neenačbe in jo prepišemo v obliko $(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$. Prej smo ugotovili, da je $(x^2 + x + 1) > 0$, zato bo produkt polinomov pozitiven le, ko bo veljalo $(x - 1) < 0$ oz. $x < 1$. Ne pozabimo, da je imenovalec negativen, ko je $x < 0$, zato je ulomek pozitiven, ko je $x \in (-\infty, 0)$.
Rešitev neenačbe: $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

II. način (grafično): Skiciramo graf polinoma in rešitev odčitamo iz grafa.

Primer: Reši neenačbo: $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$.

- **Ničle:** $x = 1$ (1. st.)
- **Poli:** $x = -1$ (1. st.)
- **Asimptota:** $y = 1$
- **Začetna vrednost:** $f(0) = -1$ (vrednost, ki jo hitro izračunamo in večkrat pride prav pri skici grafa)



Odčitamo rešitev: $x \in (-1, 1]$.

Primer 2: Reši neenačbo: $\frac{x^3-1}{x} > 0$.
Ker smo graf skicirali že prej, rešitev enostavno odčitamo (gledamo abscise točk grafa funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$, ki ležijo nad osjo x): $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

ENAČBE KROŽNICE, ELIPSE IN HIPERBOLE

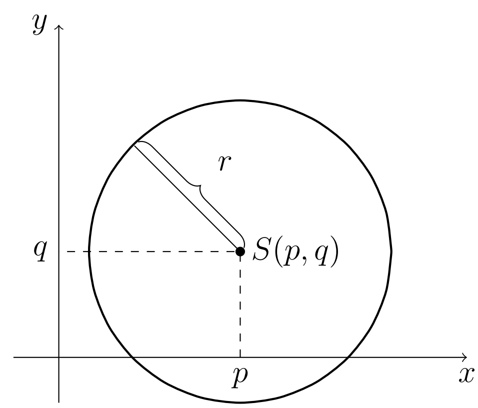
KROŽNICA

Enačba krožnice s polmerom r v izhodiščni legi (t.j. središče krožnice je v izhodišču koordinatnega sistema):

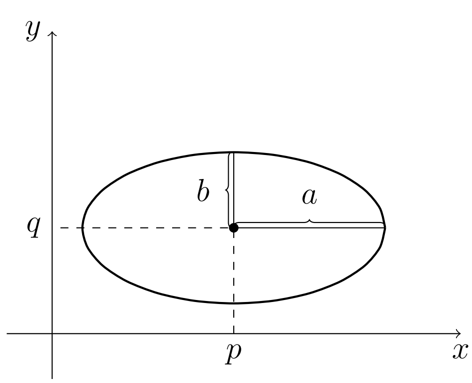
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Enačba krožnice s polmerom r in središčem v točki $S(p, q)$ (slika desno):

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$



ELIPSA



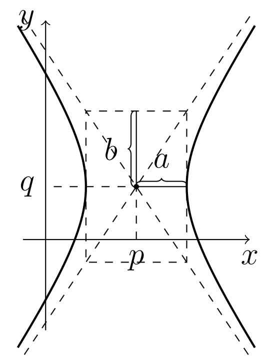
Enačba elipse z veliko polosjo a, malo polosjo b in središčem v točki $S(p, q)$:

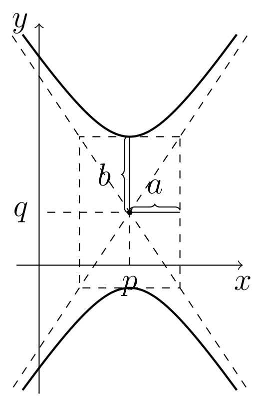
$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

HIPERBOLA

Enačba hiperbole z veliko polosjo a, malo polosjo b in središčem v točki $S(p,q)$:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \text{ (slika desno) ali}$$





$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1 \text{ (slika levo).}$$

Primer: Ali je krivulja z enačbo $x^2 + x = 2 - y^2$ krožnica, elipsa ali hiperbola? Določite njeno središče.

Najprej dopolnimo izraz $x^2 + x$ do popolnega kvadrata. Pri tem se naslonimo na formulo $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Če je v našem izrazu x enak a, potem je b enak $\frac{1}{2}$, zato računamo

$$x^2 + x = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Enačba naše krivulje se zdaj glasi

$$\begin{aligned}
x^2 + x &= 2 - y^2, \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 2, \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Prepoznamo, da gre za krožnico s središčem v točki $S\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Na kazalo

Zadnjič popravljeno: 5.12.2018 (MP)