PRO MILITARES

MATEMÁTICA

Professor Haroldo Filho

MÓDULO 14

POLINÔMIOS

Chama-se polinômio inteiro na variável x com coeficientes reais, a expressão do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes n_a, n_{a-1},..., a_1, a_0 são números reais.

Polinômio completo é aquele que não possui coeficientes nulos. Um polinômio completo de grau n possui n + 1 termos.

O coeficiente dominante ou coeficiente líder do polinômio é o coeficiente do termo de maior grau, a_n.

Polinômio mônico é aquele cujo coeficiente líder (a_n) é igual a 1.

O valor numérico do polinômio P(x) em x_0 é a imagem de x_0 pela função P, ou seja, é o valor que o polinômio assume quando substituímos x por x_0.

Assim, $P(x_0) = a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0$ **é o valor numérico de P(x) em x_0.**

Exemplo: $P(x) = 2x^3 - x - 1 \Rightarrow P(2) = 2 \cdot 2^3 - (2) - 1 = 13$

O valor de numérico do polinômio P(x) quando x = 1 é a soma dos seus coeficientes, ou seja, $P(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$.

O termo independente de x do polinômio P(x) é o termo a_0, e é igual ao valor numérico do polinômio quando fazemos x = 0, ou seja, $a_0 = P(0)$.

O grau de um polinômio P(x) não identicamente nulo, denotado por ∂P, é igual ao maior expoente da variável x nos termos com coeficientes não nulos. Se P(x) tem todos os coeficientes nulos, não se define o grau de P(x).

Exemplos: $P(x) = 2x^3 - x - 1 \Rightarrow \partial P = 3$ e $P(x) = 2 \Rightarrow \partial P = 0$

Chamam-se raízes do polinômio P(x) os valores de x tais que P(x) = 0. Um polinômio de grau n possui exatamente n raízes reais ou complexas. Desta forma, a quantidade de raízes reais é no máximo n.

Exemplo: x = 1 é raiz de $P(x) = 2x^3 - x - 1$, pois $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1 - 1 = 0$.

Dizemos que r é raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) do polinômio P(x) se, e somente se, $P(x) = (x - r)^m \cdot Q(x)$ e $Q(r) \neq 0$, ou seja, r é raiz de multiplicidade m de P(x) quando P(x) é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$.

Dois polinômios são ditos idênticos quando assumem sempre o mesmo valor, qualquer que seja o valor atribuído à variável.

Dois polinômios idênticos são sempre de mesmo grau e têm todos os coeficientes iguais.

Se dois polinômios de grau n assumem o mesmo valor para (n + 1) valores distintos da variável, então esses polinômios são idênticos.

Polinômio identicamente nulo é aquele que é nulo para qualquer valor da variável. Um polinômio identicamente nulo tem todos os seus coeficientes iguais a zero.

Se um polinômio de grau n possuir mais de n raízes, então ele é identicamente nulo.

A **adição** e a **subtração** de polinômios são feitas somando-se ou subtraindo-se os coeficientes dos termos de mesmo grau em todas as variáveis.

Exemplo: Se $P(x) = 2x^3 - x - 1$ e $D(x) = x^2 - x + 2$, temos:

$$P(x) + D(x) = (2x^3 - x - 1) + (x^2 - x + 2) = 2x^3 + x^2 + (-1 - 1)x + (-1 + 2) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} P(x) - D(x) &= (2x^3 - x - 1) - (x^2 - x + 2) = 2x^3 - x - 1 - x^2 + x - 2 = 2x^3 - x^2 + (-1 + 1)x + (-1 - 2) \\ &= 2x^3 - x^2 - 3 \end{aligned}$$

Na soma ou subtração de polinômios, o grau do polinômio resultante é menor ou igual ao maior grau dentre os graus dos polinômios operados.

$$\partial(P+D) \leq \text{máx}\{\partial P, \partial D\} \text{ e } \partial(P-D) \leq \text{máx}\{\partial P, \partial D\}$$

A multiplicação de polinômios é feita aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração.

Exemplo: Se $P(x) = 2x^3 - x - 1$ **e** $D(x) = x^2 - x + 2$**, temos:**

$$P(x) \cdot D(x) = (2x^3 - x - 1) \cdot (x^2 - x + 2) = 2x^3 \cdot (x^2 - x + 2) - x \cdot (x^2 - x + 2) - 1 \cdot (x^2 - x + 2) =$$

$$= 2x^5 - 2x^4 + 4x^3 - x^3 + x^2 - 2x - x^2 + x - 2 = 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x - 2$$

Na multiplicação de polinômios não identicamente nulos, o grau do produto é igual à soma dos graus de cada um dos fatores.

$$\partial(P \cdot D) = \partial P + \partial D$$

Considerando os polinômios do exemplo acima, temos $\partial P = 3$ e $\partial D = 2$, portanto $\partial(P \cdot D) = 3 + 2 = 5$.

A divisão de polinômios é feita com base no algoritmo da divisão de Euclides, de forma similar à divisão inteira. Assim, para dividir o polinômio P(x) (dividendo) pelo polinômio D(x) (divisor) devemos encontrar dois polinômios Q(x) e R(x), denominados quociente e resto, respectivamente, que satisfazem

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

onde $\partial R < \partial D$ ou $R(x) = 0$.

Se D(x) $\neq$ 0, então $\dfrac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$.

Se o grau do dividendo é inferior ao grau do divisor, o quociente é nulo e o resto é igual ao próprio dividendo.

$$\partial P < \partial D \Rightarrow Q(x) = 0 \ \wedge \ R(x) = P(x)$$

Se o grau do dividendo é superior ao grau do divisor ($\partial P > \partial D$), a divisão pode ser efetuada pelo seguinte algoritmo denominado Método da Chave.

I) Ordenam-se P(x) e D(x) segundo as potências decrescentes de x, incluindo os termos do dividendo que possuem coeficiente 0.

II) Divide-se o primeiro termo de P(x) pelo primeiro termo de D(x), obtendo-se o primeiro termo do quociente.

III) Multiplica-se D(x) pelo primeiro termo do quociente e subtrai-se o resultado de P(x), obtendo-se o primeiro resto parcial.

IV) Com o primeiro resto parcial e o divisor D(x) repetem-se as operações, obtendo-se o segundo termo do quociente e assim sucessivamente até se encontrar um resto de grau menor que o divisor ou nulo.

Exemplo: Se $P(x)=2x^3-x-1$ **e** $D(x)=x^2-x+2$**, temos:**

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+0x^2-x-1 & x^2-x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3+2x^2-4x\quad} & 2x+2 \\
2x^2-5x-1 & \\
\underline{-2x^2+2x-4} & \\
-3x-5 &
\end{array}
$$

Logo, o quociente é $Q(x)=2x+2$ **e o resto** $R(x)=-3x-5$**. Observe que isso implica que** $2x^3-x-1=(x^2-x+2)\cdot(2x+2)+(-3x-5)$ **é uma identidade, ou seja, essa igualdade é verdadeira para qualquer valor da variável x.**

Numa divisão de polinômios, na qual o grau do dividendo é superior ao grau do divisor, o grau do quociente é igual à diferença dos graus do dividendo e do divisor.

$$\partial(Q) = \partial P - \partial D$$

Considerando os polinômios do exemplo acima, temos $\partial P = 3$ e $\partial D = 2$, portanto $\partial(Q) = 3 - 2 = 1$.

Teorema de D'Alembert: O resto da divisão de um polinômio P(x) por ax + b, com a $\neq$ 0, é igual a $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Demonstração: Na divisão de P(x) por ax + b o resto deve ter grau zero. Assim, podemos dizer que a divisão terá um quociente Q(x) e resto R(x) = R constante. Logo,

$$P(x) = (ax+b)\cdot Q(x) + R \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = \underbrace{\left(a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)}_{0}\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \Leftrightarrow R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Exemplo: O resto de $P(x) = 2x^3 - x - 1$ por x + 1 é $P(-1) = 2(-1)^3 - (-1) - 1 = -2$.

O polinômio P(x) é divisível por ax + b, com a ≠ 0, se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Exemplo: $P(x) = 2x^3 - x - 1$ é divisível por (x – 1), pois $P(1) = 2\cdot 1^3 - 1 - 1 = 0$. Isso é fato, visto que $P(x) = 2x^3 - x - 1 = \left(2x^2 + 2x + 1\right)(x - 1)$.

Regra de Ruffini-Horner:

Para dividir um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ **por x – a, devemos seguir o seguinte algoritmo:**

1º) na primeira linha do diagrama, dispomos a raiz a do divisor na coluna à esquerda e a seguir os coeficientes de P(x), inclusive os nulos;

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

2º) na segunda linha do diagrama, dispomos o coeficiente do primeiro termo do dividendo que será o coeficiente do primeiro termo do quociente;

$$\begin{array}{c|ccccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & \begin{matrix} a_n \\ \downarrow \\ q_{n-1} \end{matrix} & & & & & &
\end{array}$$

3º) à direita do termo anterior colocamos $a \cdot q_{n-1} + a_{n-1} = q_{n-2}$, coeficiente do segundo termo do quociente;

$$\begin{array}{c|ccccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & \begin{matrix} a_n \\ \downarrow \\ q_{n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} a \cdot q_{n-1} + a_{n-1} \\ \downarrow \\ q_{n-2} \end{matrix} & & & & &
\end{array}$$

4º) repete-se a operação descrita no item anterior até atingirmos q_0;

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & a_n & a \cdot q_{n-1} + a_{n-1} & a \cdot q_{n-2} + a_{n-2} & \dots & a \cdot q_2 + a_2 & a \cdot q_1 + a_1 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
 & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & & q_1 & q_0 &
\end{array}
$$

5º) repetindo o procedimento mais uma vez obtemos o resto $r = a \cdot q_0 + a_0$ da divisão.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
	a_n	$a \cdot q_{n-1} + a_{n-1}$	$a \cdot q_{n-2} + a_{n-2}$	$\dots$	$a \cdot q_2 + a_2$	$a \cdot q_1 + a_1$	$\boxed{a \cdot q_0 + a_0}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	q_{n-1}	q_{n-2}	q_{n-3}		q_1	q_0	r

Exemplo: A divisão de $P(x) = 2x^3 - x - 1$ por (x – 1) resulta em um quociente $Q(x) = 2x^2 + 2x + 1$ e em um resto R(x) = 0.

1	2	0	-1	-1
	2	$1 \cdot 2 + 0 = 2$	$1 \cdot 2 + (-1) = 1$	$\boxed{1 \cdot 1 + (-1) = 0}$