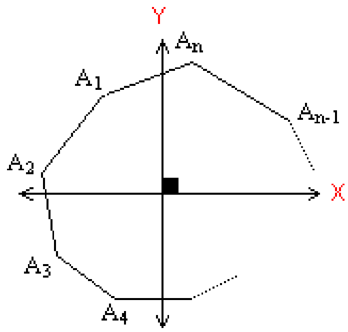
Área de una región poligonal en el plano cartesiano

Sea A_1, A_2, A_3, ..., A_n un polígono de "n" lados cuyos vértices nombrados en sentido antihorario, tiene como coordenadas : $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, $A_3(x_3;y_3)$,........, $A_n(x_n;y_n)$



Entonces el área de la región poligonal S correspondiente, es el valor absoluto de la expresión :

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad .....(1)$$

Llamada también **formula determinante de Gauss**

Obsérvese en la determinante se repite , al final, el primer par ordenado $(x_1;y_1)$ correspondiente a la coordenada de A_1.

La forma de resolver esta determinante es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

I ______________________ D

De donde : $D = x_1y_2 + x_2y_3 + ...+ x_ny_1$

$I = y_1x_2 + y_2x_3 + ...+ y_nx_1$

Luego el valor de la determinante estará dada por :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = |D - I| \qquad ....(2)$$

Por lo tanto sustituyendo (2) en (1) :

$$\boxed{S = \frac{1}{2}|D - I|u^2} \qquad ....(3)$$

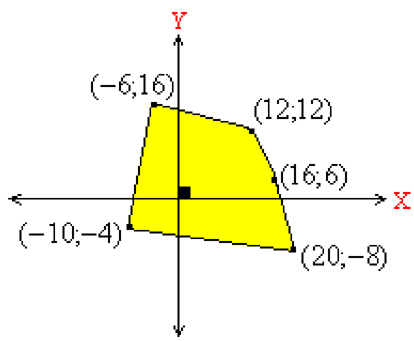
Notas :
a) La elección del primer vértice en el polígono es completamente arbitrario.
b) La expresión (3) es aplicable inclusive a figuras no convexas (cóncavas)

Ejercicio de aplicación :

Hallar el área de la región pentagonal cuyos vértices son: $(-6;16)$, $(16;6)$, $(-10;-4)$ $(12;12)$ y $(20;-8)$

Solución:

Hacemos un gráfico aproximado :



Elijamos como primer vértice al par ordenado $(12;12)$ luego:

$$(x_1; y_1) = (12;12)$$

Luego de acuerdo al par anterior los otros puntos ,teniendo en cuenta el sentido antihorario serán:

$$(x_2; y_2) = (-6;16)$$
$$(x_3; y_3) = (-10;-4)$$
$$(x_4; y_4) = (20;-8)$$
$$(x_5; y_5) = (16;6)$$

Reemplazando estos valores en (1) :

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ -6 & 16 \\ -10 & -4 \\ 20 & -8 \\ 16 & 6 \\ 12 & 12 \end{vmatrix}$$

Resolvamos la determinante de acuerdo a la teoría :

$$\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ -6 & 16 \\ -10 & -4 \\ 20 & -8 \\ 16 & 6 \\ 12 & 12 \end{vmatrix}$$

I $\qquad\qquad\qquad\qquad$ D

Luego los valores de D y de I respectivamente serán:

$$D = (12)(16) + (-6)(-4) + (-10)(-8) + (20)(6) + (16)(12) = 688$$

$$I = (12)(-6) + (16)(-10) + (-4)(20) + (-8)(16) + (6)(12) = -368$$

Finalmente sustituyendo estos valores en (3) , el área de dicha región será :

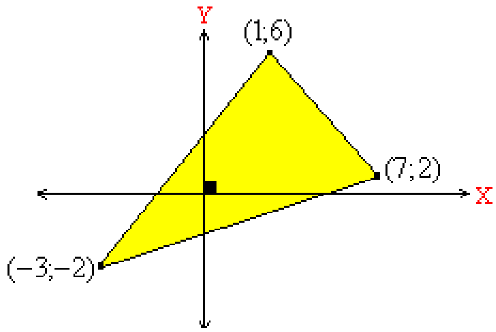
$$S = \frac{1}{2}\left|688 - (-368)\right|$$

Por lo tanto :

$$S = 488$$

Calculo del área de un triángulo dado por sus coordenadas. $(-3;-2)$, $(7;2)$, $(1;6)$

Haciendo un gráfico:



Elijamos como primer vértice al par ordenado $(-3;-2)$ luego:

$$(x_1; y_1) = (-3;-2)$$

Luego de acuerdo al par anterior los otros puntos ,teniendo en cuenta el sentido antihorario serán:

$$(x_2; y_2) = (7;2)$$
$$(x_3; y_3) = (1;6)$$

Reemplazando estos valores en (1):

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 2 \\ 1 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Resolvamos la determinante de acuerdo a lo expuesto anteriormente :

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 2 \\ 1 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

I D

Luego los valores de D y de I respectivamente serán:

$$D = (-3)(2) + (7)(6) + (1)(-2) = 34$$

$$I = (-2)(7) + (2)(1) + (6)(-3) = -30$$

Finalmente sustituyendo estos valores en (3) , el área de dicha región será :

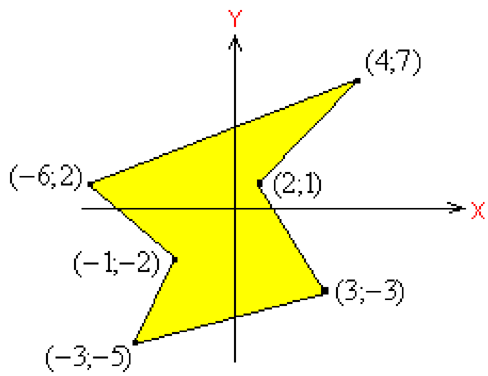
$$S = \frac{1}{2}\left|34 - (-30)\right|$$

Por lo tanto :

$$S = 32$$

Calcular el área de una región hexagonal no convexa (cóncava) cuyos vértices son:
$(3;-3)$, $(2;1)$, $(4;7)$, $(-6;2)$, $(-1;-2)$, $(-3;-5)$.

Al igual que en los demás casos dibujemos un gráfico aproximado del hexágono no convexo



Elijamos como primer par ordenado $(3;-3)$ luego:

$$(x_1; y_1) = (3;-3)$$

Luego de acuerdo al par anterior los otros puntos ,teniendo en cuenta el sentido antihorario serán:

$$(x_2; y_2) = (2;1)$$
$$(x_3; y_3) = (4;7)$$
$$(x_4; y_4) = (-6;2)$$
$$(x_5; y_5) = (-1;-2)$$
$$(x_6; y_6) = (-3;-5)$$

Reemplazando estos valores en (1) :

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 7 \\ -6 & 2 \\ -1 & -2 \\ -3 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Resolvamos la determinante de acuerdo a lo expuesto en la teoría:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 7 \\ -6 & 2 \\ -1 & -2 \\ -3 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

I ——————————— D

Luego los valores de D y de I respectivamente serán:

$$D = (3)(1) + (2)(7) + (4)(2) + (-6)(-2) + (-1)(-5) + (-3)(-3) = 51$$

$$I = (-3)(2) + (1)(4) + (7)(-6) + (2)(-1) + (-2)(-3) + (-5)(3) = -53$$

Finalmente sustituyendo estos valores en (3) , el área de dicha región será :

$$S = \frac{1}{2}\left|51 - (-53)\right|$$

Por lo tanto :

$$S = 52$$

Como puede darse cuenta estimado estudiante este método para calcular el área de una región poligonal cualquiera en el plano cartesiano es sumamente práctico y sencillo.
Esperando que te sea provechoso este trabajo me despido, hasta próxima.